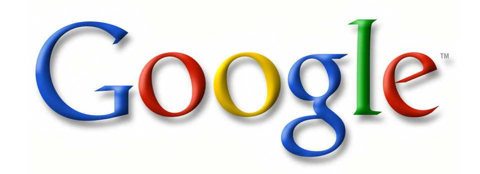
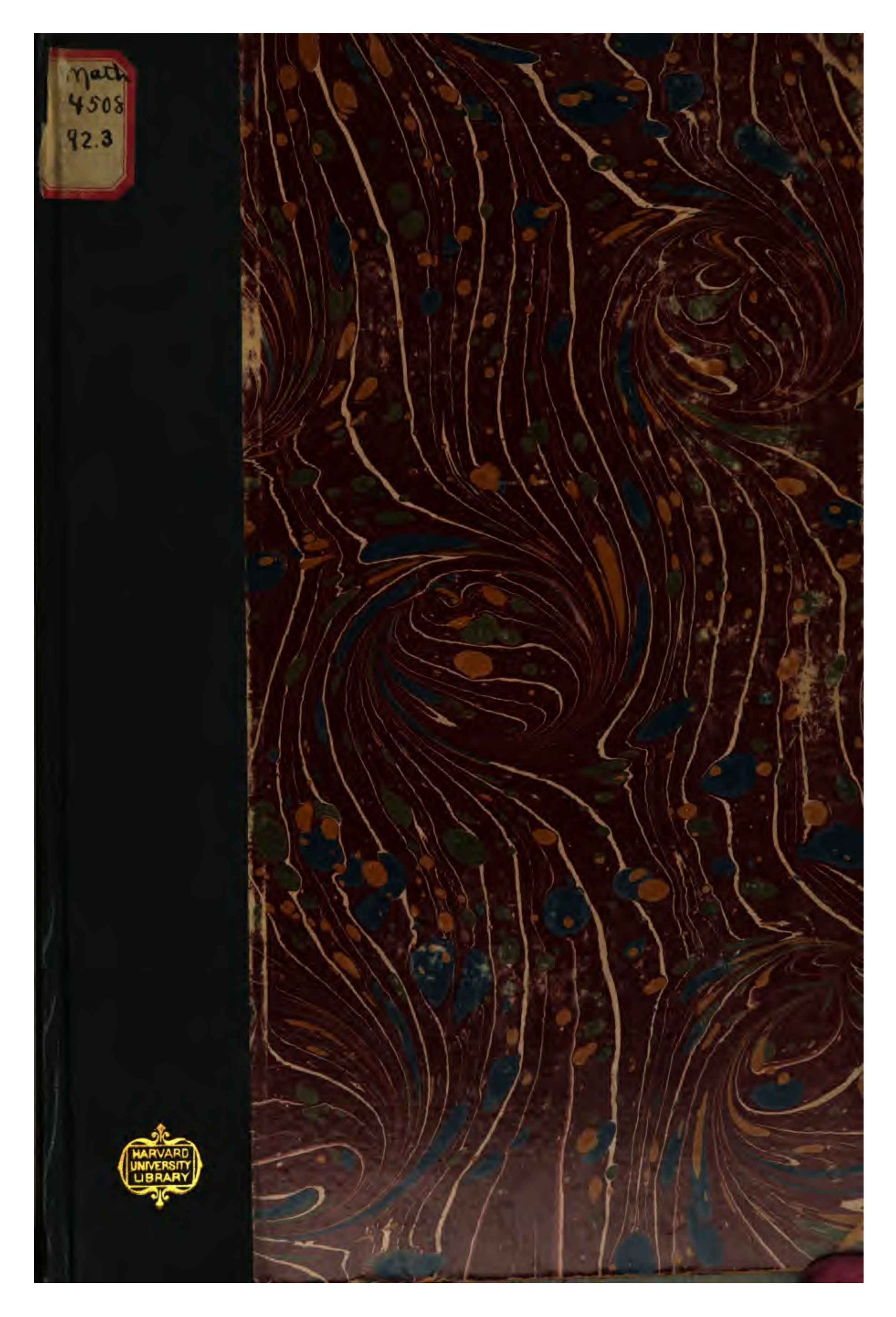
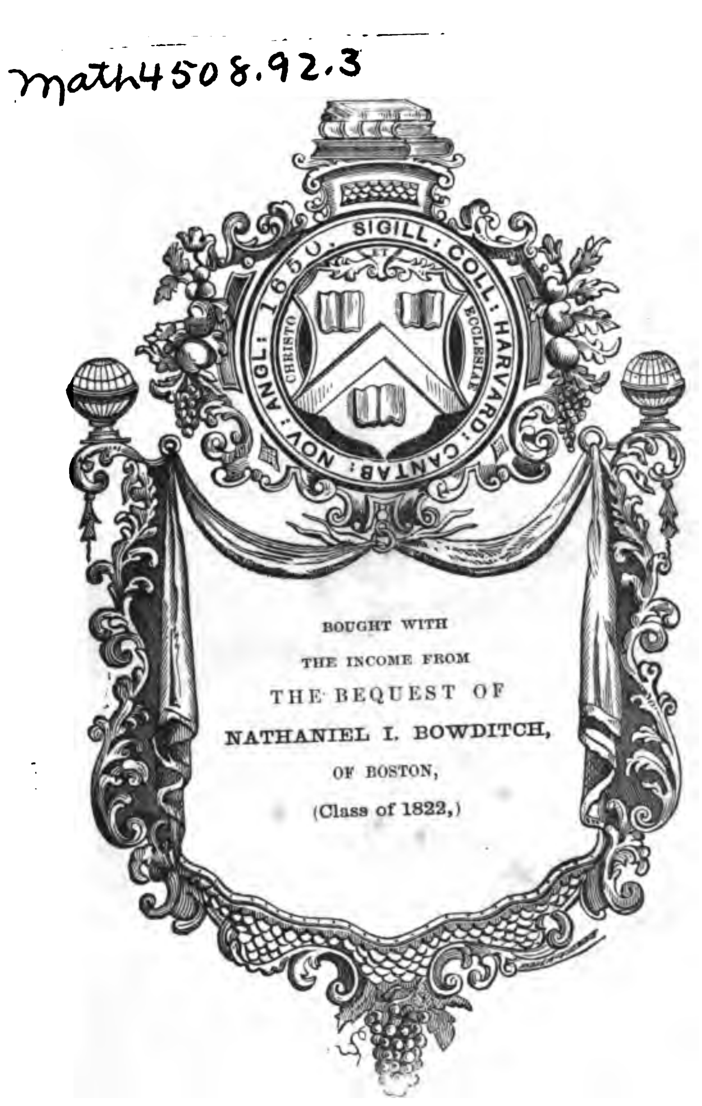
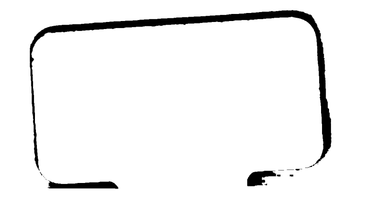



Math
4508
92.3
HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY


SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)



Bestimmung

aller

Untergruppen der projectiven Gruppe des linearen Complexes.

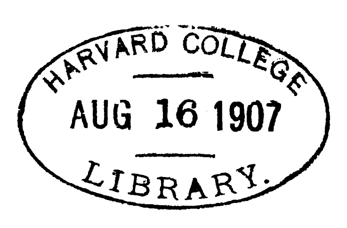
Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde der philosophischen Facultät der Universität Leipzig

vorgelegt von

Emil Paul Knothe.

Separatabdruck aus dem
«Arkiv for Mathematatik og Naturv.» B. 15. 1892.

Kristiania.
Det Mallingske Bogtrykkeri.
1892.


HARVARD COLLEGE
AUG 16 1907
LIBRARY.

Lebenslauf.

Ich, Emil Paul Knothe, evang.-luth. Confession, wurde geboren am 9 Mai 1867 in Oberoderwitz bei Zittau. In Dresden, wohin meine Eltern 1870 verzogen waren, genoss ich den ersten Jugendunterricht. Ostern 1877 trat ich in das königl. Gymnasium zu Dresden-Neustadt ein, das ich Ostern 1886 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Nachdem ich hierauf meiner Militärpflicht als Einjährig-Freiwilliger genügt hatte, wendete ich mich an das Polytechnicum zu Dresden, um Mathematik zu studieren. Hier hörte ich die Vorlesungen der Herren Professoren Fuhrmann, Harnack, Papperitz, Rohn, Schmitt, Töpler und nahm Teil an den Übungen der Herren Professoren Harnack, Hempel und Rohn. Ostern 1888 bezog ich die Universität Leipzig. Hier waren die Herren Professoren Bruns, Engel, Heinze, Hofmann, König, Lie, Masius, Mayer, Neumann, Ratzel, Wiedemann und Wundt meine hochverehrten Lehrer.

Ihnen allen, insbesondere den Herren Professoren Engel, Lie, Mayer und Wiedemann, sage ich für die vielfältige Unterstützung in meinen Studien den herzlichsten Dank.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Aufgabe, alle Typen von Untergruppen der zehngliedrigen projectiven Gruppe des linearen Complexes zu bestimmen. Diese Aufgabe ist ein specieller Teil des weit umfassenderen Problems der Bestimmung aller projectiven Gruppen des gewöhnlichen Raumes, eines Problems, das bereits von *Lie* erledigt, dessen Lösung aber zur Zeit nur in grossen Zügen veröffentlicht worden ist[1]). Unter den projectiven Gruppen des gewöhnlichen Raumes verdient aber die Gruppe des linearen Complexes deshalb ein besonderes Interesse, weil mit ihr zwei andre zehngliedrige Gruppen, die in gewissen Problemen der Theorie der Transformationsgruppen eine wichtige Rolle spielen, gleichzusammengesetzt sind[2]), nämlich die grösste

[1]) S. Lie, Untersuchungen über Transformationsgruppen, I, Arkiv for Mathem., Bd. IX. 1884.

[2]) S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, bearbeitet unter Mitwirkung von Prof. Engel, II. Abschnitt, Cap. 24, Theorem 77. In der Folge wird das Werk stets als «Trfgr.» citiert.

endliche irreducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene und die Gruppe aller conformen Punkttransformationen des Raumes.

Nachdem einleitungsweise dieser Zusammenhang zwischen den genannten drei Gruppen näher erörtert worden ist, wird zunächst für jede derselben eine geeignete Classification aller ihrer Untergruppen aufgestellt und danach auf Grund dieser Classification eine Methode zur Auffindung jener Untergruppen entwickelt. Hierauf werden schrittweise alle Untergruppen bestimmt und jede derselben durch die bei ihr invarianten Punktgebilde zu characterisieren versucht.

Die im Folgenden angewendeten Methoden rühren im Wesentlichen von Prof. *Lie* her. Insbesondere sei hervorgehoben, dass die Classification der Untergruppen der projectiven Gruppe des linearen Complexes, auf welche die ganze Bestimmung der Untergruppen sich stützt, von ihm stammt.

Die Einführung in die Theorie der Transformationsgruppen verdanke ich den Herren Proff. *Lie* und *Engel*; später war es Herr Prof. *Engel* allein, der mir die weiteren Anleitungen gab. Aus seinem Seminar ist in ihren wesentlichsten Teilen die vorliegende Arbeit, zu der ich zuerst von Herrn Prof. *Lie* veranlasst wurde, hervorgegangen. Es drängt mich, beiden Herren, besonders Herrn Prof. *Engel*, für ihre vielfache Unterstützung, die mir die Durchführung der Aufgabe erst ermöglichte, den wärmsten Dank auszudrücken.

Cap. 1.

Zusammenhang zwischen der Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene, der Gruppe des linearen Complexes und der conformen Gruppe. — Classification der Untergruppen.

§ 1.

Die grösste irreducible Gruppe von Berührungstransformationen[1]) der Ebene xz — die G_{10}, wie sie in der Folge stets genannt wird — ist die zehngliedrige

$$\boxed{\begin{array}{c} p,\ q+xr,\ r,\ xq+\tfrac{1}{2}x^2r,\ xp-yq,\ yp+\tfrac{1}{2}y^2r,\ xp+yq+2zr,\\ (z-xy)p-\tfrac{1}{2}y^2q-\tfrac{1}{2}xy^2r,\ \tfrac{1}{2}x^2p+zq+xzr,\\ (xz-\tfrac{1}{2}x^2y)p+(yz-\tfrac{1}{2}xy^2)q+(z^2-\tfrac{1}{4}x^2y^2)r \end{array}},$$

wo $p \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$, $q \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$, $r \equiv \frac{\partial f}{\partial z}$.

Ihre characteristischen Functionen[2]) lauten:

$$\boxed{\begin{array}{c} 1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ z-\tfrac{1}{2}xy,\ x(z-\tfrac{1}{2}xy),\ y(z-\tfrac{1}{2}xy),\\ (z-\tfrac{1}{2}xy)^2 \end{array}}$$

Nach einem Theorem von *Lie*[3]) giebt es in drei Veränderlichen zwei und nur zwei Typen solcher Gruppen von Punkttransformationen, welche mit der G_{10} gleichzusammengesetzt sind: nämlich die zehngliedrige projective Gruppe Γ_{10}

$$\boxed{\begin{array}{c} r_1,\ p_1-y_1r_1,\ q_1+x_1r_1,\ x_1q_1,\ x_1p_1-y_1q_1,\ y_1p_1,\\ x_1p_1+y_1q_1+2z_1r_1,\ z_1q_1-x_1(x_1p_1+y_1q_1+z_1r_1),\\ z_1p_1+y_1(x_1p_1+y_1q_1+z_1r_1),\ z_1(x_1p_1+y_1q_1+z_1r_1) \end{array}},$$

wo $p_1 \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}$, $q_1 \equiv \frac{\partial f}{\partial y_1}$, $r_1 \equiv \frac{\partial f}{\partial z_1}$,

die den linearen Complex

$$dz_1+y_1dx_1-x_1dy_1=0$$

invariant lässt, und die zehngliedrige Gruppe von conformen Punkttransformationen $\mathfrak{G}_{10}$:

---

1) Trfgr. II, Th. 69, pag. 433.

2) Trfgr. II, Cap. 14. Über Rechnung mit characteristischen Functionen siehe ebendaselbst.

3) Trfgr. II, Th. 77, pag. 460.

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathfrak{p},\ \mathfrak{q},\ \mathfrak{r},\ \mathfrak{y}\mathfrak{p}-\mathfrak{x}\mathfrak{q},\ \mathfrak{z}\mathfrak{q}-\mathfrak{y}\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}\mathfrak{r}-\mathfrak{z}\mathfrak{p}, \\ \mathfrak{x}\mathfrak{p}+\mathfrak{y}\mathfrak{q}+\mathfrak{z}\mathfrak{r},\ \ (\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2-\mathfrak{z}^2)\mathfrak{p}+2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{q}+2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{r}, \\ 2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{p}+(\mathfrak{y}^2-\mathfrak{x}^2-\mathfrak{z}^2)\mathfrak{q}+2\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{r}, \\ 2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{p}+2\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{q}+(\mathfrak{z}^2-\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2)\mathfrak{r} \end{array}},$$

$$\text{wo } \mathfrak{p} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}},\ \mathfrak{q} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}},\ \mathfrak{r} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Ist für eine dieser drei Gruppen die Bestimmung aller ihrer Untergruppen geleistet worden, so ist damit dasselbe Problem auch für die beiden anderen Gruppen gelöst; denn zu jeder Untergruppe der ersteren lassen sich die dieser innerhalb der anderen Gruppen entsprechenden Untergruppen sofort angeben, wenn die drei zehngliedrigen holoëdrisch isomorph auf einander bezogen sind. Da es mithin hier für unsern Zweck gleichgültig ist, welche der Gruppen wir ins Auge fassen, so werden wir im Folgenden des öfteren zwischen den einzelnen Gruppen wechseln und die Untersuchungen immer für diejenige Gruppe durchführen, für welche sich dieselben am durchsichtigsten gestalten.

Eine geeignete Classification aller Untergruppen und ein hierauf gegründete Methode zur Bestimmung derselben lässt sich in einfachster Weise für die Γ_{10} entwickeln, da wir es bei ihr nur mit projectiven Transformationen zu thun haben[1]).

Wir unterscheiden unter den Untergruppen der Γ_{10} zwei Kategorien, je nachdem sie einen Punkt des Raumes invariant lassen oder nicht. Zunächst werden alle Untergruppen der ersten Kategorie bestimmt. Zu dieser gehören insbesondere alle zwei- und eingliedrigen Untergruppen, denn sie lassen sämtlich mindestens einen Punkt des Raumes in Ruhe. Die Aufgabe alle Untergruppen der Γ_{10} zu ermitteln, bei denen kein Punkt invariant bleibt, zerlegt sich wieder in drei Einzelaufgaben entsprechend

[1]) Diese Classification rührt von Prof. Lie her. Vgl. auch Lie's Abhandlung im Ark. f. Math. og Naturv. B. X.

den drei denkbaren Fällen, dass invariante Curven, ferner invariante Flächen, aber keine invariante Curve und endlich überhaupt keine invariante Punktfigur vorhanden ist. Bleibt bei einer Untergruppe eine Curve, aber kein Punkt in Ruhe, so kann dies nur entweder eine ebene Curve oder eine gewundene Curve dritter Ordnung sein; denn nur diese gestatten mehr als ∞^2 projective Transformationen des Raumes[1]). Aber auch die Möglichkeit, dass ebene krumme Curven stehen bleiben, ist hierbei ausgeschlossen; alle ihre Tangenten wären nämlich Complexgerade, die Complexgeraden einer Ebene bilden aber ein Strahlenbüschel. Es kann sich also nur um gewundene Curven dritter Ordnung, die dem Complex angehören, und um Gerade handeln. Unter den Geraden des Raumes wieder ist zwischen Complexgeraden und solchen, die den Complex nicht angehören, zu unterscheiden.

Demgemäss werden erst alle Gruppen bestimmt, welche eine dem Complex angehörige Curve dritter Ordnung, dann die, welche Complexgerade, endlich die, welche Nichtcomplexgerade invariant lassen, ohne dass ein Punkt gleichzeitig in Ruhe bleibt.

Ist dies geschehen, so erübrigt es noch die Untergruppen aufzusuchen, die eine krumme Fläche, aber keine Curve und keinen Punkt, und endlich die, welche keine Punktfigur in Ruhe lassen.

Eine ganz ähnliche Klassifikation lässt sich für die G_{10} von Berührungstransformationen und die conforme Gruppe $\mathfrak{G}_{10}$ entwickeln. Hierzu ist es nötig, kurz den Zusammenhang zu besprechen, in dem die G_{10} und $\mathfrak{G}_{10}$ mit der Γ'_{10}[2]) stehen.

Führt man zunächst mit Hülfe der Substitutionen

$$x = x_1, \; y = -2y_1, \; z = z_1 - x_1 y_1$$

xyz als neue Veränderliche in die Pfaffsche Gleichung

$$(1) \qquad dz_1 + y_1 dx_1 - x_1 dy_1 = 0,$$

[1]) Klein und Lie, Comptes Rendus 1870.

[2]) Trfgr. II. § 109.

die unsern linearen Complex definiert, ein, so geht dieselbe über in

(2) $$dz - y dx = 0.$$

Jede Transformation, die den linearen Complex (1) invariant lässt, verwandelt sich hierbei in eine Berührungstransformation der Ebene xz, die die Schar der ∞^3 Integralcurven

(3) $$z = a - 2bx - cx^2, \quad y = -2b - 2cx$$

der Pfaffschen Gleichung (3) in Ruhe lässt, wenn man xyz als Punktcoordinaten im Raume deutet, also die Linienelemente der Ebene xz als Punkte in einem Raume von 3 Dimensionen abbildet. Die Schar (3) entspricht der Schar der ∞^3 Complexgeraden

(4) $$z_1 = a - bx_1, \quad y_1 = b + cx_1,$$

die die Integralcurven von (1) darstellen, jeder Nichtcomplexgeraden

(5) $$z_1 = \mu + \nu x_1, \quad y_1 = \lambda + \rho x_1 \quad (\nu + \lambda \neq 0)$$

eine Curve der Schar

(6) $$z = \mu + (\nu - \lambda)x - \rho x^2, \quad y = -2\lambda - 2\rho x,$$

jeder gewundenen Curve dritter Ordnung, die dem Complex (1) angehört, eine gewundene Curve im Raume xyz, die der Pfaffschen Gleichung (2) genügt.

Demgemäss treffen wir für die Untergruppen der G_{10}, analog wie bei der Γ_{10}, die folgende Einteilung: erstens alle, die einen Punkt xyz — oder ein Linienelement der Ebene xz — stehen lassen, zweitens solche, die keinen Punkt des Raumes xyz stehen lassen; bei den letzteren sind die Fälle möglich, dass eine gewundene Curve, oder eine Integralcurve (3) oder eine Curve der Schar (6) in Ruhe bleibt oder ein krumme Fläche oder endlich kein Punktgebilde.

Auch die $\mathfrak{G}_{10}$ steht in einer einfachen Beziehung zur Γ_{10}[1]). Die Γ_{10} lässt die Schar aller ∞^3 Complexgeraden, die wir in der Form schreiben:

---

[1]) Der im Folgenden eingeschlagene Weg schliesst sich eng an Trfgr. I, Cap. 21. Theorem 72.

$$(7) \quad z_1 = \mathfrak{x} - i\mathfrak{y} - \mathfrak{z}x_1, \quad y_1 = \mathfrak{z} + (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})x_1 \quad (i = \sqrt{-1})$$

invariant; werden die Punkte $x_1\, y_1\, z_1$ des Raumes nun durch die Γ_{10} transformiert, so werden die Parameter $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{z}$, also die Complexgeraden, durch die $\mathfrak{G}_{10}$ transformiert. In der That, die Bedingung, dass zwei unendlich benachbarte Complexgerade, die durch die Parameter $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}+d\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}+d\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}+d\mathfrak{z}$ bestimmt sind, sich schneiden, findet ihren Ausdruck in der Gleichung:

$$(8) \qquad d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2 + d\mathfrak{z}^2 = 0.$$

Da die Γ_{10} zwei sich schneidende Complexgerade in sich schneidende Complexgerade überführt, so lässt die Gruppe, vermöge welcher die Parameter $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ transformiert werden, die Gleichung (8) invariant und ist somit identisch mit der zehngliedrigen Gruppe $\mathfrak{G}_{10}$ aller conformen Punkttransformationen des Raumes $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$[1]).

Die $\mathfrak{G}_{10}$ lässt sich nach diesen Bemerkungen einfach in folgender Weise bestimmen: Ist $Xf \equiv \xi p_1 + \eta q_1 + \zeta r_1$ irgend eine infinitesimale Transformation der Γ_{10}, so suchen wir eine infinitesimale Transformation

$$\xi p_1 + \eta q_1 + \zeta r_1 + \alpha(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})\mathfrak{p} + \beta(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})\mathfrak{q} + \gamma(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})\mathfrak{r}$$

von der Beschaffenheit, dass sie das Gleichungssystem (7) invariant lässt. Dann ist unmittelbar $\alpha\mathfrak{p} + \beta\mathfrak{q} + \gamma\mathfrak{r}$ die eingliedrige Gruppe der $\mathfrak{G}_{10}$, welche angiebt, wie die Complexgeraden $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ bei der eingliedrigen Gruppe Xf transformiert werden. Indem wir so mit jeder der zehn unabhängigen infinitesimalen Transformationen der Γ_{10} verfahren, erhalten wir die $\mathfrak{G}_{10}$ und zwar sofort in einer solchen Form, in der sie holoëdrisch isomorph ist mit der Γ_{10} oder der G_{10}

$$\left| 1,\ x,\ x^2,\ y,\ z-xy,\ x(z-\tfrac{1}{2}xy),\ z,\ y(z-\tfrac{1}{2}xy),\ (z-\tfrac{1}{2}xy)^2 \right|;$$

sie lautet:

---

[1]) Trfgr. I, Cap. 21. Theorem 72.

$$\begin{vmatrix} -\mathfrak{p}+i\mathfrak{q},\ \mathfrak{r},\ \mathfrak{p}+i\mathfrak{q},\ -\mathfrak{z}\mathfrak{p}+\mathfrak{x}\mathfrak{r}+i(\mathfrak{z}\mathfrak{q}-\mathfrak{y}\mathfrak{r}),\ -2i(\mathfrak{y}\mathfrak{p}-\mathfrak{x}\mathfrak{q}), \\ -\mathfrak{z}\mathfrak{p}+\mathfrak{x}\mathfrak{r}-i(\mathfrak{z}\mathfrak{q}-\mathfrak{y}\mathfrak{r}), \\ (\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2-\mathfrak{z}^2)\mathfrak{p}+2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{q}+2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{r}-i[2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{p}+(\mathfrak{y}^2-\mathfrak{x}^2-\mathfrak{z}^2)\mathfrak{q}+2\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{r}], \\ 4\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{p}+4\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{q}+2(\mathfrak{z}^2-\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2)\mathfrak{r}, \\ -(\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2-\mathfrak{z}^2)\mathfrak{p}-2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{q}-2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{r}-i[2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{p}+(\mathfrak{y}^2-\mathfrak{x}^2-\mathfrak{z}^2)\mathfrak{q}+2\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{r}] \end{vmatrix}$$

Um nun eine geeignete Classification aller Untergruppen der $\mathfrak{G}_{10}$ zu finden, fassen wir $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ als Punktcoordinaten in einem Raume $\mathfrak{R}_3$ auf. Jeder Complexgeraden im R_3 des linearen Complexes entspricht dann ein Punkt des $\mathfrak{R}_3$. Die Complexgeraden durch einen Punkt bilden sich im $\mathfrak{R}_3$ als Punkte einer geraden Linie ab, die den unendlich fernen Kugelkreis schneidet, ferner alle Complexgeraden einer linearen Congruenz als Punkte einer Kugel, wobei die Directricen der Congruenz sich in die beiden Scharen von Erzeugenden der Kugel verwandeln; die Complexgeraden, die eine Complexgerade $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ schneiden, als Punkte eines Nullkegels, dessen Spitze in $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ liegt, endlich die Tangenten einer gewundenen Curve 3. Ordnung, die dem linearen Complex angehört, in die Punkte einer gewundenen Curve des $\mathfrak{R}_3$, die dem Complex zweiten Grades (8) angehört.

Auf Grund dieser Andeutungen können wir für die $\mathfrak{G}_{10}$ eine ähnliche Classification entwickeln, wie für die G_{10} und Γ_{10}.

Wir greifen zunächst alle Untergruppen der $\mathfrak{G}_{10}$ heraus, die einen Punkt des $\mathfrak{R}_3$ invariant lassen. Ihnen entsprechen innerhalb der Γ_{10} solche Gruppen, die eine Complexgerade stehen lassen. Jede Untergruppe der $\mathfrak{G}_{10}$ von dieser Beschaffenheit ist, da der invariante Punkt ins Unendlichferne verlegt werden kann, innerhalb der $\mathfrak{G}_{10}$ mit der Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen des $\mathfrak{R}_3$ gleichberechtigt. Unter diesen Untergruppen zeichnen wir besonders noch diejenigen aus, bei denen keine Gerade, die den unendlich fernen Kugelkreis schneidet, in Ruhe bleibt; sie entsprechen

den Untergruppen der Γ_{10}, die eine Complexgerade, aber keinen Punkt stehen lassen.

Hiernach bleiben noch alle Untergruppen der $\mathfrak{G}_{10}$ übrig, die keinen Punkt des $\mathfrak{R}_3$ in sich überführen. Da es sich zeigen wird, dass es keine Untergruppe der Γ_{10} giebt, die eine krumme Fläche, aber kein Curve und keinen Punkt stehen lässt, und keine, bei der überhaupt kein Punktgebilde in Ruhe bleibt, so sind dann nur noch drei Möglichkeiten vorhanden: entweder bleibt eine Gerade in Ruhe, die den unendlich fernen Kugelkreis schneidet, oder nur eine Kugel oder endlich eine gewundene Curve, die dem Complex zweiten Grades (8) angehört, entsprechend der Thatsache, dass jede Untergruppe der Γ_{10}, die keine Complexgerade invariant lässt, sicher entweder einen Punkt oder eine Nichtcomplexgerade oder eine gewundene Curve dritter Ordnung in sich transformiert.

§ 2.

Zur Vermeidung von häufigen Wiederholungen sollen im Folgenden die hauptsächlichsten Transformationen der G_{10}, welche später Anwendung finden, zusammengestellt werden.

Die endlichen Gleichungen der eingliedrigen Gruppen $1, x, y, x^2, xy, y^2, z-\frac{1}{2}xy$ lauten bez:

$$(T_1)\quad x'=x,\ y'=y,\ z'=z+t,$$
$$(T_2)\quad x'=x,\ y'=y+t,\ z'=z+xt,$$
$$(T_3)\quad x'=x+t,\ y'=y,\ z'=z,$$
$$(T_4)\quad x'=x,\ y'=y+xt,\ z'=z+\tfrac{1}{2}x^2t,$$
$$(T_5)\quad x'=xe^{t},\ y'=ye^{-t},\ z'=z,$$
$$(T_6)\quad x'=x+yt,\ y'=y,\ z'=z+\tfrac{1}{2}y^2t,$$
$$(T_7)\quad x'=xe^{t},\ y'=ye^{t},\ z'=ze^{2t}.$$

Für die eingliedrige Gruppe x^2+y^2 besitzen die endlichen Gleichungen die Form:

$$x' = x\cos t - y\sin t,\quad y' = x\sin t + y\cos t,$$
$$z' = z + \frac{x^2-y^2}{2}\sin t\cos t - xy\sin^2 t.$$

Setzen wir $t = \frac{\pi}{2}$, so erhalten wir insbesondere die Transformation:

$$(T_8)\quad x' = -y,\ y' = x,\ z' = z - xy.$$

Es seien hieran nach einige Transformationen der Γ_{10} gefügt, die uns bei der Discussion der Untergruppen von Nutzen sein werden. Wir bedienen uns dabei homogener Coordinaten $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$, die wir durch die Gleichungen:

$$x = \frac{x_1}{x_4},\quad y = \frac{x_2}{x_4},\quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

definieren. Hierdurch verwandelt sich, wie bekannt, die Γ_{10} in die lineare homogene Gruppe:

$$\begin{vmatrix} x_4p_3,\ x_4p_2 - x_1p_3,\ x_4p_1 + x_2p_3, \\ x_1p_2,\ x_1p_1 - x_2p_2,\ x_2p_1,\ x_3p_3 - x_4p_4, \\ x_3p_2 + x_1p_4,\ x_3p_1 - x_2p_4,\ x_3p_4 \end{vmatrix}$$

Von Wichtigkeit sind gewisse Transformationen der eingliedrigen Gruppen $x_4p_1 - x_3p_2 + x_2p_3 - x_1p_4$ und $x_3p_1 + x_4p_2 - x_1p_3 - x_2p_4$, die man erhält, wenn man in den endlichen Gleichungen dieser Gruppen das eine Mal $t = \frac{\pi}{2}$, das andere Mal $t = \frac{\pi}{4}$ setzt:

$$(T_9)\quad x_1' = -x_4,\ x_2' = x_3,\ x_3' = -x_2,\ x_4' = x_1,$$
$$(T_{10})\quad x_1' = -x_3,\ x_2' = -x_4,\ x_3' = x_1,\ x_4' = x_2,$$
$$(T_{11})\quad x_1' = x_1 - x_4,\ x_2' = x_2 + x_3,\ x_3' = -x_2 + x_3,$$
$$x_4' = x_1 + x_4,$$
$$(T_{12})\quad x_1' = x_1 - x_3,\ x_2' = x_2 - x_4,\ x_3' = x_1 + x_3,\ x_4' = x_2 + x_4.$$

Cap. 2.

Bestimmung aller Untergruppen der G_{10}, welche einen Punkt invariant lassen. Deutung derselben.

Wir gehen zunächst auf die Bestimmung aller Untergruppen der G_{10} ein, welche einen Punkt invariant lassen. Da jeder Punkt des Raumes in jeden anderen vermöge einer Transformation der G_{10} übergeführt werden kann, verlegen wir diesen invarianten Punkt in den unendlich fernen Punkt der *z—Axe*. Die grösste Untergruppe der G_{10}, welche diesen Punkt stehen lässt, lautet:

$$\left| 1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ z - \tfrac{1}{2}xy \right|$$

Sie wird im Folgenden kurz als G_7 bezeichnet. Es handelt sich daher darum, alle Untergruppen dieser siebengliedrigen Gruppe zu ermitteln.

Um eine Controle für die Richtigkeit der gewonnenen Resultate zu haben, wird diese Bestimmung im Folgenden auf zwei verschiedenen Wegen durchgeführt[1]).

§ 3.

Die erste Methode stützt sich auf die Thatsache, dass die sechsgliedrige Gruppe:

$$\left| 1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2 \right|,$$

die zur Abkürzung G_6 genannt werden möge, eine invariante Untergruppe der G_7 bildet. Auf Grund dieser Bemerkung lässt sich unser Problem sofort in zwei einfachere Einzelprobleme zerlegen, welche nach einander erledigt werden müssen. Es werden nämlich innerhalb der Untergruppen der G_7 zwei Klassen unterschieden werden können, je nachdem in diesen Untergruppen die characteristische

---

[1]) Die erste Methode verdankt der Verfasser Herrn Prof. Engel, die zweite Herrn Prof. Lie.

Function $Z \equiv z - \frac{1}{2}xy$ vorkommt oder nicht. Die, welche der ersteren Klasse angehören, sind zugleich Untergruppen der G_6. Von denen der zweiten Klasse gilt dies zwar nicht; wohl aber enthält jede r-gliedrige Gruppe dieser Art eine $r-1$ gliedrige invariante Untergruppe, welche auch der G_6 angehört. Denn sind etwa

$$u_k + \alpha_k Z \quad (k = 1, \ldots r),$$

wo die u_k nur aus characteristischen Functionen der G_6 zusammengesetzt und nicht alle α_k Null sind, die characteristischen Functionen jener r-gliedrigen Gruppe, so lassen sich aus ihnen durch lineare Verknüpfung r characteristische Functionen von der Form

$$u_1', \; u_2' \ldots u'_{r-1}, \; u_r' + \alpha Z$$

ableiten, wo nunmehr $u_1' \ldots u'_{r-1} \, u_r'$ sämtlich frei von Z sind. Hier bilden offenbar die $u_r' \ldots u'_{r-1}$ unter sich eine Gruppe, welche als invariante Untergruppe in der G_6 enthalten ist. Man erkennt daraus, dass die Bestimmung aller Untergruppen der G_7 in folgender Weise geleistet werden kann: erst werden alle Untergruppen der G_6 aufgesucht und dann, um auch alle diejenigen Untergruppen zu finden, in denen Z vorkommt, jeder der erhaltenen $r-1$ gliedrigen Untergruppen der G_6 eine $r$te characteristische Function von der Form

$$Z + \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \beta_1 x^2 + 2\beta_2 xy + \beta_3 y^2$$

hinzugefügt und die Constanten $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \;\; \beta_1 \beta_2 \beta_3$ in geeigneter Weise ermittelt.

Wir beschäftigen uns demgemäss zunächst mit der sechsgliedrigen Gruppe:

$$\boxed{1, \; x, \; y, \; x^2, \; xy, \; y^2}$$

Ist G_r eine beliebige r-gliedrige Untergruppe der G_6, so bringen wir sie durch passende lineare Verknüpfung ihrer characteristischen Functionen auf eine solche Form:

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} v_k &\equiv \beta_{k1}x^2 + \beta_{k2}xy + \beta_{k3}y^2 + \alpha_{k1} + \alpha_{k2}x + \alpha_{k3}y, \quad (k = 1, \ldots \gamma) \\ w_j &\equiv \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{j1} + a_{j2}x + a_{j3}y, \quad (j = 1, \ldots r - \gamma) \end{aligned}$$

dass sich aus den v_k keine characteristische Function von der Gestalt $\alpha x+\beta y+\gamma$ linear herleiten lässt. Es ist klar, dass die Glieder zweiter Stufe

$$(a^1) \qquad v_k' \equiv \beta_{k1}x^2+\beta_{k2}xy+\beta_{k3}y^2$$

unter sich eine Gruppe bilden. Denn combiniert man zwei der Functionen v_k, so wird in dem entstehenden Ausdruck wiederum ein Glied zweiter Stufe auftreten, welches sich offenbar linear aus den v'_k zusammensetzen lassen muss.

Wir unterscheiden nun die Untergruppen der G_6 nach der Anzahl γ der in ihnen auftretenden characteristischen Functionen v_k und suchen der Reihe nach diejenigen, in welchen $\gamma = 0, 1, 2, 3$ ist.

Es wird zweckmässig sein, vorher zur Vereinfachung der Form der v_k erst alle Untergruppen der dreigliedrigen

$$G_3 \equiv \boxed{x^2, \ xy, \ y^2}$$

zu bestimmen.

Jede eingliedrige Gruppe der G_3 hat die Form:

$$u \equiv ax^2+bxy+cy^2.$$

Vermöge der Transformation (T_6) geht dieselbe über in:

$$u = ax'^2+x'y'(b-2at)+y'^2(at^2-bt+c).$$

Sind a und b nicht gleichzeitig Null, so lässt sich t stets so wählen, dass der Coefficient von y'^2 versshwindet. Ist dann zugleich für diesen Wert von t auch $b-2at$ Null, so reduciert sich u auf x^2. Besitzt aber die Gleichung

$$at^2-bt+c = 0$$

keine Doppelwurzel, so kann mit Hülfe der Transformation (T_4) auch der Coefficient von x'^2 auf dieselbe Weise, wie der von y'^2, zum Verschwinden gebracht werden. Wir finden mithin die beiden Typen

$$\boxed{x^2} \quad \text{und} \quad \boxed{xy}.$$

Denn auch die eingliedrige Gruppe y^2, welche im Falle $a = b = 0$ auftritt, ist mit x^2 gleichberechtigt; die Transformation (T_8), welche der G_3 angehört, vertauscht ja y^2 mit x^2.

Ist ferner

$$u = ax^2 + bxy + cy^2,\ u_1 = a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2$$

eine zweigliedrige Untergruppe der G_3, so können wir zunächst auf dieselbe Weise, wie es bei den eingliedrigen Gruppen geschah, eine der characteristischen Functionen, etwa u_1, auf eine der Formen x^2 oder xy bringen, wobei die andere, da nur Transformationen der G_3 benutzt werden, die Form annimmt:

$$u' = a'x^2 + b'xy + c'y^2.$$

Beide Möglichkeiten führen auf denselben Typus. Denn im ersten Falle, wo $a' = 0$ gesetzt werden kann, zeigt die Bildung des Klammerausdruckes:

$$\{b'xy + c'y^2,\ x^2\} \equiv 2b'x^2 + 4c'xy,$$

dass $c' = 0$ ist. Im zweiten Falle, wo $b' = 0$ gesetzt werden kann, zeigt die Identität:

$$\{a'x^2 + b'y^2,\ xy\} \equiv 2b'y^2 - 2a'x^2,$$

dass entweder a oder b Null ist. Die beiden Gruppen x^2, xy und y^2, xy sind aber wiederum vermöge der Transformation (T_3) in einander überführbar, also innerhalb der G_3 gleichberechtigt.

Die kanonischen Formen für die Untergruppen der G_3

$$\boxed{x^2,\ xy,\ y^2}$$

sind also

$$\boxed{x^2,\ xy},\qquad \boxed{xy},\qquad \boxed{x^2}.$$

Es ist nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit gestattet anzunehmen, dass die v_k' in (a[1]), welche sich aus den Gliedern zweiter Stufe in den v_k zusammensetzen, die Form jener Untergruppentypen der G_3 besitzen. Denn die Operationen, die zur Reduction auf diese canonischen Formen nötig waren, sind unmittelbar auf die v_k' und v_k übertragbar. Ferner bewahren auch bei den angewendeten Transformationen, die sämtlich der G_3 angehören, alle

Ausdrücke von der Form $a+bx+cy$ bis auf unwesentliche Änderungen der Constanten a, b, c ihre frühere Gestalt.

Wir suchen zunächst alle diejenigen Untergruppen der G_6, in denen die Anzahl der Functionen v_k gleich 3 ist, in denen also drei characteristische Functionen von der Form auftreten:

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} v_1 &\equiv x^2+\alpha_1+\beta_1 x+\gamma_1 y, \\ v_2 &\equiv xy+\alpha_2+\beta_2 x+\gamma_2 y, \\ v_3 &\equiv y^2+\alpha_3+\beta_3 x+\gamma_3 y. \end{aligned}$$

Zu diesen können noch eine, zwei oder drei characteristische Functionen

$$\text{(c)} \qquad w_j \equiv a_j+b_j x+c_j y$$

hinzukommen, und schliesslich ist die Möglichkeit vorhanden, dass eine Gruppe nur aus den characteristischen Functionen $v_1 v_2 v_3$ besteht. Den letzten Fall behandeln wir zuerst.

Schreibt man v_2 in der Gestalt

$$v_2 \equiv (x+\gamma_2)(y+\beta_2)+\alpha_2-\beta_2\gamma_2,$$

so erkennt man sofort, dass vermöge der Transformationen (T_2) und (T_3) v_2 auf die Form gebracht werden kann:

$$v_2 \equiv xy+\lambda.$$

Ist dies geschehen, so ergeben die Klammeroperationen

$$\begin{aligned} \{v_2 v_1\} &\equiv 2x^2+\beta_1 x-\gamma_1 y \equiv 2v_1, \\ \{v_3 v_2\} &\equiv 2y^2-\beta_3 x+\gamma_3 y \equiv 2v_3 \end{aligned}$$

und zeigen, dass $\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=\alpha_3=\beta_3=\gamma_3=0$ ist. Aus

$$\{y^2,\ x^2\} \equiv 4xy$$

folgt endlich, dass auch $\lambda=0$ sein muss, und wir erhalten die Gruppe:

$$1) \qquad \boxed{x^2,\ xy,\ y^2}$$

Es mögen jetzt zu $v_1 v_2 v_3$ eine Anzahl von characteristischen Functionen w_j treten. Ist dann

$$w \equiv a+bx+cy$$

die allgemeinste characteristische Function dieser Art, welche

in irgend einer der so entstehenden Gruppen vorhanden ist, so muss die betreffende Gruppe, da

$$\{xy+\lambda,\ w\} \equiv bx-cy$$

und weiterhin

$$\{xy+\lambda,\ bx-cy\} \equiv bx+cy$$

ist, auch die characteristischen Functionen a, bx, cy enthalten. Ist nun etwa b von Null verschieden, so zeigt die Bildung des Klammerausdruckes

$$\{v_3,\ x\} \equiv 2y+\gamma_3,$$

dass auch $2y+\gamma_3$, mithin schliesslich

$$\{x,\ 2y+\gamma_3\} \equiv -2,$$

also die characteristische Function 1 ebenfalls der Gruppe angehört. Dasselbe Resultat liefert die Annahme, dass c nicht Null ist. In beiden Fällen gelangen wir zur G_6. Dagegen liefert die Annahme, dass b und c beide Null sind. aber a nicht verschwindet, wie leicht durch Bildung der Klammerausdrücke $\{v_1 v_2\}$ und $\{v_2 v_3\}$ zu bestätigen ist, die Gruppe:

2) $\boxed{1,\ x^2,\ xy,\ y^2}$

Wir wenden uns zur Bestimmung aller Untergruppen der G_6, in welchen zwei characteristische Functionen v_k auftreten. Wir können die v_k ohne Beschränkung in der Form

$$v_1 \equiv x^2+\alpha_1+\beta_1 x+\gamma_1 y,$$
$$v_2 \equiv xy+\lambda$$

voraussetzen.

Sollen v_1 und v_2 für sich eine Gruppe bilden, so müssen, da

$$\{v_2 v_1\} \equiv 2x^2+\beta_1 x-\gamma_1 y \equiv 2v_1,$$

α_1, β_1, γ_1 sämtlich Null sein, und diese Gruppe lautet:

3) $\boxed{x^2,\ xy+\lambda}$

Um ferner alle Untergruppen zu finden, in welchen ausser v_1 und v_2 noch gewisse characteristische Functionen

$$w_j \equiv a_j + b_j x + c_j y$$

enthalten sind, bezeichnen wir wiederum mit

$$w \equiv a + bx + cy$$

die allgemeinste characteristische Function dieser Art, welche einer solchen Gruppe angehört. Es ergiebt sich dann wie früher, dass diese Gruppe die characteristischen Functionen a, bx, cy umfassen muss. Ist nun c von Null verschieden, enthält also die Gruppe die characteristische Function y, so enthält sie auch

$$\{y, v_1\} \equiv 2x + \beta_1 \quad \text{und} \quad \{2x + \beta_1, y\} \equiv -2,$$

mithin $x, y, 1$. Diesem Falle entspricht also die Gruppe:

$$4) \qquad \overline{|1, x, y, x^2, xy|}.$$

Ist nun $c = 0$, so sind noch die folgenden Möglichkeiten vorhanden: a und $b \neq 0$; $a = 0$, $b \neq 0$; $a = 0$, $b = 0$. Die Bildung des Klammerausdrucks $\{v_1 v_2\}$ lässt in jedem dieser Fälle erkennen, dass $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$ ist. Wir erhalten daher die Gruppen:

$$5) \ \overline{|1, x, x^2, xy|}, \quad 6) \ \overline{|x, x^2, xy + \lambda|}, \quad 7) \ \overline{|1, x^2, xy|}.$$

Gehen wir nunmehr zur Bestimmung aller Untergruppen der G_6 über, die nur eine characteristische Function v_k enthalten, so haben wir von vornherein zwei Hauptfälle zu unterscheiden analog den beiden verschiedenen eingliedrigen Untergruppen der G_3, nämlich

$$v \equiv xy + \lambda \quad \text{und} \quad v \equiv x^2 + \alpha + \beta x + \gamma y.$$

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem ersten dieser Fälle. Hier stellt

$$8) \qquad \overline{|xy + \lambda|}$$

unmittelbar den Typus einer eingliedrigen Gruppe der G_6 dar. Tritt nun wieder zu $xy + \lambda$ eine beliebige characteristische Function $w \equiv a + bx + cy$, die mit $xy + \lambda$ einer Gruppe von der verlangten Beschaffenheit angehören soll, so muss

diese Gruppe auch die characteristischen Functionen a, bx, cy enthalten. Sind zunächst a, b, c verschieden von Null, so ergiebt sich der Typus:

$$9) \qquad \overline{|1,\ x,\ y,\ xy|}.$$

Zu demselben Ergebnis führt auch die Annahme, dass $a = 0$, aber b und c verschieden von Null sind, weil $\{y, x\} \equiv 1$. Ist $c = 0$, so erhalten wir, entsprechend den drei Möglichkeiten: a und $b \neq 0$; $a = 0$, $b \neq 0$; $a \neq 0$, $b = 0$, die weiteren Typen:

$$10) \quad \overline{|1,\ x,\ xy|}, \qquad 11) \quad \overline{|x,\ xy+\lambda|}, \qquad 12) \quad \overline{|1,\ xy|}.$$

Die Annahme $b = 0$ liefert nichts Neues, da die Transformation (T_8) x mit y zu vertauschen gestattet.

Wir kommen zu dem Falle, wo die Function v die Form besitzt: $v \equiv x^2 + \alpha + \beta x + \gamma y$.

Mit Hülfe der Transformation (T_3) lässt sich zunächst stets erreichen, dass das Glied βx verschwindet. Wir setzen also v in der Form voraus: $v \equiv x^2 + \alpha + \gamma y$.

Ist nun γ von Null verschieden, so bringen wir das Glied α durch die Transformation (T_2) zum Verschwinden und machen endlich γ vermöge der Transformation (T_5) gleich 1. Ist dagegen $\gamma = 0$, so geben wir, falls α von Null verschieden ist, vermöge derselben Transformation (T_5) v die Form $x^2 + 1$. Fügen wir hierzu noch die Möglichkeit $\alpha = \gamma = 0$, so haben wir die folgenden drei Typen eingliedriger Gruppen:

$$13) \quad \overline{|x^2|}, \qquad 14) \quad \overline{|x^2+1|}, \qquad 15) \quad \overline{|x^2+y|}.$$

Die Transformationen (T_2), (T_3), (T_4), welche eben angewendet wurden, lassen aber den Ausdruck

$$w_j \equiv a_j + b_j x + c_j y$$

im Wesentlichen ungeändert. Wir können daher bei der Aufsuchung weiterer Untergruppen von der geforderten Beschaffenheit, welche ausser v noch gewisse characteristische

Functionen w_j enthalten, v in irgend einer jener canonischen Formen annehmen.

Ist
$$w \equiv a+bx+cy$$
die allgemeinste characteristische Function, welche mit $x^2+\mu$, wo $\mu = 0$ oder 1 ist, einer solchen Untergruppe angehört, so ist
$$\{x^2+\mu,\ w\} \equiv -2cx.$$
Falls c nicht verschwindet, umfasst diese Gruppe die characteristische Function x, folglich, da sie w enthält, auch $y+\frac{a}{c}$ und $\left\{y+\frac{a}{c}, x\right\} \equiv 1$. Die Gruppe hat mithin die Form:

16) $\overline{|1,\ x,\ y,\ x^2|}$

Ist $c = 0$, so sind noch folgende Möglichkeiten denkbar:
$$a \text{ und } b \neq 0;\ a = 0,\ b \neq 0;\ a \neq 0,\ b = 0.$$
Bedenken wir gleichzeitig, dass $\mu = 0$ oder 1 zu nehmen ist, so ergeben sich die Typen:

17) $\overline{|1,\ x,\ x^2|}$, 18) $\overline{|x,\ x^2|}$, 19) $\overline{|1,\ x^2|}$, 20) $\overline{|x,\ x^2+1|}$.

Es sei endlich $v \equiv x^2+y$, und wiederum $w \equiv a+bx+cy$ die allgemeinste characteristische Function, welche mit x^2+y in einer Gruppe von der verlangten Beschaffenheit auftritt. Dann ist
$$\{x^2+y,\ w\} \equiv -2cx+b.$$
Der Fall, dass c nicht verschwindet, würde, wie sich leicht nachweisen lässt, auf die obige viergliedrige Gruppe zurückführen. Im Falle $c = 0$ ist zwischen den Möglichkeiten, dass $b = 0$ und $b \neq 0$ ist, zu unterscheiden, und es folgen die Typen:

21) $\overline{|1,\ x^2+y|}$, 22) $\overline{|1,\ x,\ x^2+y|}$.

Es bleiben hiernach nur noch diejenigen Gruppen übrig, deren characteristische Functionen frei von jedem Gliede zweiter Stufe sind, also die Gruppe:

23) $$\Gamma_3 \equiv \overline{|1,\ x,\ y|}$$

mit ihren Untergruppen.

Jede eingliedrige Untergruppe der Γ_3 hat die Form: $a+bx+cy$. Ist b von Null verschieden, so lassen sich mit Hülfe der Transformationen (T_6) und (T_8) die Glieder cy und a gleich Null machen; diesem Fall entspricht also der Typus

24) $$\overline{|x|}.$$

Der Fall, dass c nicht Null ist, führt in ähnlicher Weise auf den Typus y; da indessen die Transformation (T_8) y mit x vertauscht, so sind die Typen x und y gleich berechtigt innerhalb der G_6. Die Annahme $a=b=0$ liefert endlich die Gruppe

25) $$\overline{|1|}.$$

Bilden ferner die characteristischen Functionen

$$w_1 \equiv a_1+b_1x+c_1y,\ w_2 \equiv a_2+b_2x+c_2y$$

eine zweigliedrige Gruppe der Γ_3, so können wir etwa w_1 auf eine der Formen x oder 1 bringen. Ist $w_1 \equiv x$, so muss in w_2 der Coefficient von y verschwinden; sonst würde die Gruppe ausser einer characteristischen Function $y+\nu$ noch $\{y+\nu,\ x\} \equiv 1$ enthalten und wäre mit der Γ_3 identisch. Sie kann demnach nur die Gestalt besitzen

26) $$\overline{|1,\ x|}.$$

Ist $w_1 \equiv 1$, so wird $w_2 \equiv bx+cy$ und kann ebenfalls auf die Form x gebracht werden; wir erhalten also denselben Typus.

Die Bestimmung aller Untergruppentypen der G_6 ist im Vorangehenden ganz ohne Rücksicht darauf, dass wir die G_6 als Untergruppe der G_7 zu betrachten haben, durchgeführt worden. Lassen wir jetzt diese Auffassung in Kraft treten, so zeigt sich, dass die Constante λ, falls sie nicht Null ist, mit Hülfe der Transformation (T_7) gleich 1 gemacht werden kann. Aus allen Gruppen, welche die charac-

teristische Function $xy+\lambda$ enthalten, ergeben sich daher zwei Typen, indem einmal $\lambda = 0$, dann $\lambda = 1$ zu setzen ist.

Nachdem alle Untergruppen der G_6 bestimmt worden sind, bleibt noch die Aufgabe, alle Untergruppen der G_7 aufzustellen, welche die characteristische Function Z in irgend welcher Verbindung enthalten. Jede r-gliedrige Gruppe von dieser Eigenschaft besitzt, wie wir bereits früher bemerkten, eine r—1 gliedrige invariante Untergruppe, welche zugleich Untergruppe der G_6 ist. Wir dürfen ohne Beschränkung annehmen, dass diese $r-1$ gliedrige Untergruppe — die G_{r-1}, wie sie im Folgenden stets genannt wird — unmittelbar eine der bestimmten canonischen Formen für die Untergruppen der G_6 hat. Denn die Transformationen, welche angewendet wurden, um die Untergruppen der G_6 auf jene canonischen Formen zurückzuführen, gehören sämtlich der G_6 an und beeinflussen die Gestalt der characteristischen Function

$$U \equiv Z+\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\beta_1 x^2+\beta_2 xy+\beta_3 y^2,$$

welche die G_{r-1} zur r-gliedrigen Untergruppe der G_7 ergänzt, nur insoweit, als sie den Constanten $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3$ neue Werte erteilen. Wir fügen daher, um alle Untergruppen der G_7 von der verlangten Beschaffenheit zu ermitteln, zu jedem Untergruppentypus der G_6, zu jeder G_{r-1}, U als neue characteristische Function und suchen die Constanten $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3$ in geeigneter Weise zu bestimmen.

Zunächst lässt sich U stets um $r-1$ Summanden verkürzen, indem die characteristischen Functionen der G_{r-1} mit passenden Constanten multipliciert von U subtrahiert werden. Ferner sei vorausgeschickt, dass die Constante α_1 mit Hülfe der Transformation (T_1) zum Verschwinden gebracht werden kann.

Wir behandeln zunächst den Fall, wo die G_{r-1}, die drei characteristischen Functionen x^2, xy, y^2 enthält, also eine der beiden Formen 1) oder 2) besitzt.

Dann hat U die Gestalt: $U \equiv Z + \alpha_2 x + \alpha_3 y$,
und es wird $\{U, xy\} \equiv -\alpha_2 x + \alpha_3 y$,
mithin $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Wir finden daher die Typen:

$$\overline{\left|1,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ z\right|}, \qquad \overline{\left|x^2,\ xy,\ y^2,\ z\right|}.$$

Enthält ferner die G_{r-1} zwei characteristische Functionen von der Form x^2, $xy+\lambda$, nicht aber y^2, so ist:

$$U \equiv Z + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \beta_3 y^2$$

und es folgt:

$$\{U, xy+\lambda\} \equiv \lambda - \alpha_2 x + \alpha_3 y + 2\beta_3 y^2,$$

also $\beta_3 = 0$. Ist die G_{r-1} mit der fünfgliedrigen 4) identisch, so hat demnach die entsprechende G_r die Form:

$$\overline{\left|1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ z\right|}.$$

Wählen wir ferner 5) oder 6) als G_{r-1}, so wird $U \equiv Z + \alpha_3 y$ und die Combination mit $xy+\lambda$ zeigt, dass $\alpha_3 = \lambda = 0$ ist. Es ergeben sich also die Gruppen:

$$\overline{\left|1,\ x,\ x^2,\ xy,\ z\right|}, \qquad \overline{\left|x,\ x^2,\ xy,\ z\right|}.$$

Auf ganz demselben Wege führen die Gruppen 7) bez. 3) zu den Typen:

$$\overline{\left|1,\ x^2,\ xy,\ z\right|}, \qquad \overline{\left|x^2,\ xy,\ z\right|}.$$

Kommen ferner in der G_{r-1} characteristische Functionen zweiter Stufe nur in der Verbindung $xy+\lambda$ vor, so wird

$$U \equiv Z + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \beta_1 x^2 + \beta_3 y^2$$

und $\{U, xy+\lambda\} \equiv -\alpha_2 x + \alpha_3 y - 2\beta_1 x^2 + 2\beta_3 y^2 + \lambda$,
also $\beta_1 = \beta_3 = 0$. Demnach entspricht der G_{r-1} 9) die Gruppe:

$$\overline{\left|1,\ x,\ y,\ xy,\ z\right|}.$$

Ist die G_{r-1} eine der Gruppen 10) oder 11), so besitzt die U die Form $Z + \alpha_3 y$; die Combination

$$\{U, xy+\lambda\} \equiv \alpha_3 y + \lambda$$

zeigt aber, dass $\alpha_3 = \lambda = 0$ ist, und wir haben die Typen:

$$\overline{|1, x, xy\ z|}, \qquad \overline{|x, xy, z|}.$$

Ebenso ergeben sich aus den Gruppen 12) bez. 8) die Typen:

$$\overline{|1, xy, z|}, \qquad \overline{|xy, z|}.$$

Wir betrachten endlich die Fälle, wo x^2 die einzige characteristische Function 2. Stufe ist, die in der G_{r-1} vorkommt.

Hier hat U die Form: $U \equiv Z + \beta_2 xy + \beta_3 y^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$, und es kommt:

$$\{U, x^2\} \equiv 2\beta_2 x^2 + 4\beta_3 xy + 2\alpha_3 x,$$

mithin $\beta_3 = 0$. Dagegen lässt sich über die Beschaffenheit von β_2 nichts aussagen. Der G_{r-1} 16) entspricht also der Typus:

$$\overline{|1, x, y, x^2, z + \alpha xy|}.$$

Ist ferner 18) die G_{r-1}, so hat U die Gestalt $Z + \beta_2 xy + \alpha_3 y$ und es wird:

$$\{U, x\} \equiv (\tfrac{1}{2} + \beta_2) x + \alpha_3,$$

also $\alpha_3 = 0$; wir erhalten mithin die Gruppe:

$$\overline{|x, x^2, z + \alpha xy|}.$$

Für die G_{r-1} 17) reduciert sich U auf $Z + \beta_2 xy + \alpha_3 y$. Wenden wir die Transformation (T_3) an, welche die Form der G_{r-1} unverändert lässt, so geht U über in:

$$Z' + \beta_2 x'y' + y'(\alpha_3 + (\tfrac{1}{2} - \beta_2)t).$$

Das Glied $\alpha_3 y$ lässt sich also stets zum Verschwinden bringen, ausser wenn $\beta_2 = \frac{1}{2}$. Dann aber gestattet die Transformation (T_5) α_3 gleich -1 zu machen. Wir finden mithin die Typen:

$$\overline{|1, x, x^2, z + \alpha xy|}, \qquad \overline{|1, x, x^2, z - y|},$$

wo nachträglich α auch der Wert 0 frei stehen soll.

Wählen wir endlich als G_{r-1} eine der beiden Gruppen 19) oder 13), so ist $U \equiv Z + \beta_2 xy + \alpha_2 x + \alpha_3 y$ und aus der

Combination $\{U, x^2\}$ folgt, dass $\alpha_3 = 0$ ist, also U die Form besitzt: $U \equiv Z + \beta_2 xy + \alpha_2 x$. Bei Ausführung der Transformation (T_2), welche die Form der G_{r-1} in keiner Weise verändert, geht U über in:

$$Z + \beta_2 x'y' + x'(\alpha_2 - (\tfrac{1}{2} + \beta_2)t,$$

und wir haben die beiden wesentlich verschiedenen Fälle $\beta_2 = -\frac{1}{2}$ und $\beta_2 \neq -\frac{1}{2}$ zu unterscheiden. Im letzteren Falle kann das Glied $\alpha_2 x$ stets gleich Null gemacht werden. Im ersteren Falle können wir, falls α_2 von Null verschieden ist, erreichen, dass α_2 gleich -2 wird; dazu verhilft die Transformation (T_5). Wir gewinnen so die Typen:

$$\boxed{1,\ x^2,\ z + \alpha xy}, \qquad \boxed{x^2,\ z + \alpha xy},$$

$$\boxed{1,\ x^2,\ z - xy - 2x}, \qquad \boxed{x^2,\ z - xy - 2x},$$

wobei wir den Fall $\beta_2 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 0$ mit dem allgemeinen Falle, wo α beliebig ist, vereinigen.

Es sei ferner die G_{r-1} mit einer der Gruppen 14) oder 20) identisch. Dann hat U wiederum die Form:

$$U \equiv Z + \beta_2 xy + \beta_3 y^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 y,$$

und es ergiebt sich die Identität

$$\text{(a)} \qquad \{U,\ x^2 + 1\} \equiv 2\beta_2 x^2 + 4\beta_3 xy + 2\alpha_3 x + 1,$$

also $\beta_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_3 = 0$. Enthält die G_{r-1} noch die characteristische Function x, wie es im ersten Falle geschieht, so zeigt die Combination: $\{U,\ x\} \equiv x + \alpha_3$, dass $\alpha_3 = 0$ ist. Dasselbe Resultat liefert die Identität (a) für den Fall, dass die G_{r-1} nur aus der characteristischen $x^2 + 1$ besteht. Dann hat also U die Gestalt: $U \equiv z + \alpha_2 x$; da der Coefficient von $xy \neq -\frac{1}{2}$ ist, gestattet die Transformation (T_2), welche ausserdem die Form von $x^2 + 1$ nicht verändert, das Glied $\alpha_2 x$ zum Verschwinden zu bringen. Wir erhalten auf diese Weise die Typen:

$$\boxed{x,\ x^2 + 1,\ z}, \qquad \boxed{x^2 + 1,\ z}.$$

Wir kommen endlich zu dem Falle, dass die G_{r-1} eine der Formen 15), 21) oder 22) besitzt. Auch hier ist:

$$U \equiv Z + \beta_2 xy + \beta_3 y^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 y,$$

und es folgt:

$$\text{(b)} \quad \{U, x^2+y\} \equiv 2\beta_2 x^2 + 4\beta_3 xy + 2\alpha_3 x + (\tfrac{1}{2} - \beta_2)y - \alpha_2,$$

mithin $\beta_3 = 0$, $\beta_2 = \frac{1}{6}$.

Betrachten wir zunächst 22) als G_{r-1}, so ist

$$U \equiv z - \tfrac{1}{3}xy + by;$$

da der Coefficient von xy von -1 verschieden ist, so können wir, wie wir früher sahen, vermöge der Transformation (T_3) erreichen, dass das Glied by verschwindet, und wir gelangen zu der Gruppe:

$$\boxed{1,\ x,\ x^2+y,\ 3z-xy}.$$

Wählen wir ferner 21) als G_{r-1}, so ist der Identität (b) gemäss $\alpha_3 = 0$, und U erhält die Form:

$$U \equiv z - \tfrac{1}{3}xy + \alpha_2 x.$$

Mit Hülfe der Transformation (T_2) bringen wir noch das Glied $\alpha_2 x$ zum Verschwinden und finden den Typus:

$$\boxed{1,\ x^2+y,\ 3z-xy}.$$

Reduciert sich die G_{r-1} auf x^2+y, so sind α_2 und α_3 beide Null, wie die Identität (b) zeigt, und es ergiebt sich die Gruppe:

$$\boxed{x^2+y,\ 3z-xy}.$$

Es bleiben hiernach nur noch die Fälle zu erledigen, in denen die G_{r-1} eine der Formen 23), 24), 25) oder 26) besitzt. Im ersten Falle können wir U in der Gestalt annehmen:

$$U \equiv Z + \beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2.$$

Mit Hülfe der Transformationen (T_4), (T_6), (T_8) ist nun stets zu erreichen, dass der Ausdruck $\beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2$ entweder gleich ax^2 oder axy wird, ohne dass dabei die G_{r-1} ihre ursprüngliche Gestalt verändert. Es ist daher

einmal $U \equiv Z + ax^2$, das andere Mal $U \equiv z + \alpha xy$ zu setzen. Ist a von Null verschieden, so gestattet die Transformation (T_5) diese Constante $= -\frac{1}{2}$ zu machen. Es ergeben sich also die Typen:

$$\overline{\left| 1, x, y, 2Z - x^2 \right|}, \qquad \overline{\left| 1, x, y, z + \alpha xy \right|},$$

wo wiederum α jeden beliebigen endlichen Wert annehmen kann.

Es sei weiter die G_{r-1} mit der Gruppe 26) identisch. Dann ist

$$U \equiv Z + \beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2 + \alpha_3 y,$$

und die Identität:

$$\{U, x\} \equiv (\tfrac{1}{2} + \beta_2)x + 2\beta_3 y + \alpha_3$$

zeigt, dass $\beta_3 = 0$ ist. Ist nun β_2 von Null verschieden, so gelingt es allein mit Hülfe der Transformation (T_4) das Glied $\beta_1 x^2$ fortzuschaffen, so dass U die Form gewinnt:

$$U \equiv z + \beta_2 xy + \alpha_3 y.$$

Je nachdem dann $\beta_2 = \frac{1}{2}$ oder von $\frac{1}{2}$ verschieden ist, erhalten wir, wie sich leicht bestätigen lässt, die Gruppen

$$\overline{\left| 1, x, z - y \right|}, \qquad \overline{\left| 1, x, z + \alpha xy \right|},$$

wo nun α alle Werte annehmen kann. Ist $\beta_2 = 0$, also

$$U \equiv Z + \beta_1 x^2 + \alpha_3 y,$$

so bringen wir mit Hülfe der Transformation (T_3) das Glied $\alpha_3 y$ zum Verschwinden und machen endlich vermöge der Transformation (T_5), falls β_1 nicht Null ist — und diesen Fall brauchen wir nur noch ins Auge zu fassen —, diese Constante $= -\frac{1}{2}$. So ergiebt sich die Gruppe:

$$\overline{\left| 1, x, 2Z - x^2 \right|}.$$

Wählen wir ferner $\overline{\left| x \right|}$ als G_{r-1}, so wird

$$U \equiv Z + \beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2 + \alpha_3 y$$

und

$$\{U, x\} \equiv (\tfrac{1}{2} + \beta_2)x + 2\beta_3 y + \alpha_3,$$

also $\alpha_3 = \beta_3 = 0$. Je nachdem $\beta_2 \neq 0$ oder $= 0$ ist, ergeben sich auf einem ganz ähnlichen Wege, wie er für die G_{r-1} 26) eingeschlagen wurde, die Typen:

$$\boxed{x,\ 2Z - x^2}, \qquad \boxed{x,\ z + \alpha xy},$$

wo wiederum α keiner Beschränkung unterliegt.

Es sei endlich die G_{r-1} durch die Gruppe $\boxed{1}$ gegeben. Dann ist

$$U \equiv Z + \beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 y,$$

und es kommt darauf an, diese characteristische Function auf gewisse canonische Formen zu reducieren. Sind nicht alle Constanten β_1 β_2 β_3 Null, so können wir zunächst vermittelst der Transformationen (T_4), (T_6), (T_8) dem Ausdruck $\beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2$ eine der Formen ax^2 oder axy erteilen. Im ersten Falle gewinnt U die Gestalt:

$$U \equiv Z + ax^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 y.$$

Vermöge der Transformation (T_8) lässt sich ferner das Glied $\alpha_3 y$ entfernen; ist dies geschehen, so gelingt es mit Hülfe der Transformation (T_2) leicht, auch das in x multiplicierte Glied fortzuschaffen. Da a von Null verschieden ist, können wir durch Anwendung der Transformation (T_5) $a = -\frac{1}{2}$ machen und erhalten so schliesslich: $U \equiv 2Z - x^2$, und die entsprechende G_r bekommt die Form:

$$\boxed{1,\ 2Z - x^2}.$$

Lässt sich in der oben angegebenen Weise der Ausdruck $\beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2$ auf die Form αxy bringen, so wird:

$$U \equiv Z + \alpha xy + \alpha_2 x + \alpha_3 y,$$

und wir haben, wie schon des öfteren geschehen, zwischen folgenden drei Fällen zu unterscheiden:

$$\alpha = \tfrac{1}{2},\ \alpha = -\tfrac{1}{2},\ \alpha \text{ weder } -\tfrac{1}{2} \text{ noch } +\tfrac{1}{2}.$$

Die typischen Formen für U sind demnach:

$$U \equiv z - y,\ U \equiv z - xy - 2x,\ U \equiv z + \alpha xy.$$

Wenn der Wert von α keiner Beschränkung unterliegt, so

umfasst der letzte Fall ausser den Möglichkeiten $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 0$; $\alpha = +\frac{1}{2}$, $\alpha_3 = 0$ auch die einzige noch denkbare, dass alle $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ Null sind. Denn tritt dies letztere ein, so hat zwar zunächst U die Gestalt:

$$U \equiv Z + \alpha_2 x + \alpha_3 y,$$

mit Hülfe der Transformationen (T_2) und (T_3) aber lässt sich U auf die Form Z reducieren.

Wir erhalten demnach noch die folgenden zweigliedrigen Gruppen:

$$\overline{\underline{|1,\ z+\alpha xy|}}, \qquad \overline{\underline{|1,\ z-xy-2x|}}, \qquad \overline{\underline{|1,\ z-y|}}.$$

Die Bestimmung aller eingliedrigen Gruppen endlich, in welche ein Glied mit z eingeht, kommt auf die Zurückführung der characteristischen Function:

$$U \equiv Z + \beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

auf gewisse canonische Formen hinaus, eine Aufgabe, welche bereits im Vorhergehenden gelöst worden ist. Die dort bestimmten Typen sind die Folgenden:

$$\overline{\underline{|2Z-x^2|}}, \qquad \overline{\underline{|z-xy-2x|}}, \qquad \overline{\underline{|z-y|}}, \qquad \overline{\underline{|z+\alpha xy|}},$$

wo α unbeschränkt ist.

Es sei schon hier bemerkt, dass innerhalb der G_7 die Gruppen

$$\overline{\underline{|1,\ z-xy-2x|}}, \qquad \overline{\underline{|1,\ z-y|}}$$

und andererseits

$$\overline{\underline{|z-xy-2x|}}, \qquad \overline{\underline{|z-y|}}$$

gleichberechtigt sind, da die Transformation (T_8) x mit y zu vertauschen gestattet.

§ 4.

Im Folgenden wird eine zweite Methode zur Bestimmung aller Untergruppen der Γ_7, die innerhalb der Γ_{10} der G_7 entspricht, entwickelt. Dieselbe stützt sich auf die

Kenntnis aller Untergruppen der linearen projectiven Gruppe der Ebene, welche von Lie vollständig angegeben worden sind[1]).

Wir schreiben die Γ_7 in der Form:

$$\left| r,\ p+yr,\ q-xr,\ xq,\ yp,\ xp+zr,\ yq+zr \right|.$$

Alle ihre infinitesimalen Transformationen besitzen die Gestalt:

$$X_k f \equiv \xi_k(xy)p + \eta_k(xy)q + \zeta(xyz)r.$$

Es erzeugen also die verkürzten infinitesimalen Transformationen

$$\overline{X_k f} \equiv \xi_k(xy)p + \eta_k(xy)q$$

eine Gruppe $\overline{G}$ und zwar eine solche, welche, $r \equiv 0$ gesetzt, mit der Gruppe der $X_k f$ isomorph ist. Sehen wir von der eingliedrigen Gruppe r ab, so entspricht jeder Untergruppe der Γ_7 eindeutig eine Untergruppe der $\overline{G}$. Es fragt sich nun, ob es gelingt, umgekehrt aus den Untergruppen der $\overline{G}$ alle Untergruppen der Γ_7 abzuleiten.

Ist $\overline{G}_r$ eine beliebige r gliedrige Untergruppe der $\overline{G}$, so wird zunächst jede infinitesimale Transformation $\overline{X_k f}$ derselben durch Hinzufügung des in r multiplicierten Gliedes $\zeta_k r$, das sich unmittelbar aus der Form der infinitesimalen Transformationen der Γ_7 ergiebt, zu dem entsprechenden $X_k f$ ergänzt werden müssen. Es sind nun nur zwei Möglichkeiten denkbar: Erstens kann die Untergruppe der Γ_7, aus welcher die $\overline{G}_r$ abgeleitet werden kann, die eingliedrige Gruppe r enthalten; alle Gruppen von dieser Beschaffenheit erhalten wir einfach, indem wir r als neue infinitesimale Transformation zu den $X_k f$ hinzufügen. Zweitens aber kann die $\overline{G}_r$ auch aus einer solchen Untergruppe der Γ_7 entstanden gedacht werden, welcher die eingliedrige Untergruppe r nicht angehört; wir werden zu allen Untergruppen von dieser Art gelangen, wenn wir zu jeder infinitesimalen

[1]) Lie, Ark. f. Math., Bd. X.

Transformation $X_k f$ ein Glied $\alpha_k r$ additiv hinzufügen; dabei bedeuten die α_k zunächst willkürliche Constanten, welche erst aus den Gruppenbedingungen näher zu bestimmen und, soweit dies möglich ist, durch Transformationen der Γ_{10} zu specialisieren sind.

Lassen wir endlich zu den so ermittelten Untergruppen noch die eingliedrige Gruppe r treten, so ist das gestellte Problem vollständig erledigt.

Die $\overline{G}$ ist die lineare projective Gruppe der Ebene:

$$\overline{|p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq|}.$$

Jede ihrer Untergruppen ist innerhalb dieser Gruppe mit einer der folgenden gleichberechtigt:

I. 5-gliedrige:

a) $\overline{|p,\ q,\ xq,\ yq,\ xp|}$ b) $\overline{|p,\ q,\ xq,\ xp-yq,\ yp|}$

II. 4-gliedrige:

a) $\overline{|p,\ q,\ xp,\ yq|}$ b) $\overline{|q,\ yq,\ xq,\ xp|}$

c) $\overline{|xq,\ xp,\ yq,\ yp|}$ d) $\overline{|p,\ q,\ xq,\ axp+byq|}$

III. 3-gliedrige:

a) $\overline{|xq,\ xq-yq,\ yp|}$ b) $\overline{|q,\ xq,\ axp+byq|}$

c) $\overline{|p,\ q,\ axp+byq|}$ d) $\overline{|q,\ yq,\ xp|}$

e) $\overline{|xq,\ yp,\ xp|}$ f) $\overline{|q,\ xq,\ p+yq|}$

g) $\overline{|p,\ q,\ xp+(y+x)q|}$ h) $\overline{|q,\ xq,\ p|}$

i) $\overline{|q,\ p+xq,\ xp+2yq|}$

IV. 2-gliedrige:

a) $\overline{|q,\ xq|}$ b) $\overline{|p,\ q|}$ c) $\overline{|q,\ p+xq|}$

d) $\overline{|xq,\ xp+q|}$ e) $\overline{|yq,\ xp|}$ f) $\overline{|q,\ axp+byq|}$

g) $\overline{|xq, axp+byq|}$ h) $\overline{|q, p+yq|}$ i) $\overline{|q, xp+(y+x)q|}$

k) $\overline{|p-2xq, xp+2yq|}$

V. 1-gliedrig:

a) $\overline{|xp+cyp|}$ b) $\overline{|p+yq|}$ c) $\overline{|p+xq|}$

d) $\overline{|q|}$ e) $\overline{|xq|}$ f) $\overline{|xp+(y+x)q|}$

Wir behandeln zunächst alle Untergruppen der $\overline{G}$, welche die infinitesimalen Transformationen p und q enthalten. In jeder ihnen entsprechenden Untergruppe der Γ_7 treten dann die infinitesimalen Transformationen $p+yr+\alpha_1 r$ und $q-xr+\alpha_2 r$, mithin auch

$$(q-xr+\alpha_2 r, \; p+yr+\alpha_1 r) \equiv 2r,$$

also r selbst auf. Die Gruppen I^a, I^b, II^a, II^d, III^c, III^g, III^h, VI^b liefern daher nur die folgenden Typen:

$\overline{|r, p+yr, q-xr, xq, xp-yq, xp+yq+2zr|}$,

$\overline{|r, p+yr, q-xr, xq, xp-yq, yp|}$,

$\overline{|r, p+yr, q-xr, axp+byq+(a+b)zr, xq|}$,

$\overline{|r, p+yr, q-xr, axp+byq+(a+b)zr|}$,

$\overline{|r, p+yr, q-xr, xp+(y+x)q+2zr|}$,

$\overline{|r, p+yr, q-xr, xq|}$,

$\overline{|r, p+yr, q-xr, xp-yq, xp+yq+2zr|}$,

$\overline{|r, p+yr, q-xr|}$.

Die $\overline{G}$ selbst führt auf die Γ_7 zurück.

Analoges gilt auch für alle Untergruppen der $\overline{G}$, die zwei infinitesimale Transformationen von der Form q, $p-2xq$ oder q, $p+yq$ enthalten. Allen Untergruppen der Γ_7, welche solchen Typen entsprechen, gehören bez. die infinitesimalen

Transformationen $q-xr+\alpha_1 r$, $p+yr-2xq+\alpha_2 r$ oder $q-xr+\beta_1 r$, $p+yq+(y+z)r+\beta_2 r$ an. Da nun

$$(q-xr+\alpha_1 r,\ p+yr-2xq+\alpha_2 r) \equiv 2r,$$
$$(q-xr+\beta_1 r,\ p+yq+(y+z)r+\beta_2 r) \equiv 2r+q-xr+\beta_1 r,$$

kommt auch r vor. Aus den Gruppen III^f, III^i, IV^c, IV^h ergeben sich daher nur die Typen:

$$\overline{\underline{|\,r,\ q-xr,\ xq,\ p+yq+(y+c)r\,|}},$$

$$\overline{\underline{|\,r,\ p+yr-2xq,\ q-xr,\ xp+2yq+3zr\,|}},$$

$$\overline{\underline{|\,r,\ p+yr-2xq,\ q-xr\,|}},$$

$$\overline{\underline{|\,r,\ q-xr,\ p+yq+(y+z)r\,|}}.$$

Während zwischen den bis jetzt behandelten Untergruppen der $\overline{G}$ und den ihnen entsprechenden Untergruppen der Γ_7 eine eindeutig umkehrbare Zuordnung stattfindet, ist dies für alle weiteren Typen der $\overline{G}$ und Γ_7 nicht mehr der Fall; wir haben von nun an vielmehr zwischen Untergruppen, welche r als selbstständige infinitesimale Transformation enthalten, innerhalb der Γ_7 zu unterscheiden. Die Untergruppen der ersten Art lassen sich ohne Weiteres angeben; sie lauten:

$$\overline{\underline{|\,r,\ q-xr,\ xq,\ xp-yq,\ xp+yq+2zr\,|}},$$

$$\overline{\underline{|\,r,\ xq,\ xp-yq,\ yp,\ xp+yq+2zr\,|}},$$

$$\overline{\underline{|\,r,\ xq,\ xp-yq,\ yp\,|}},$$

$$\overline{\underline{|\,r,\ q-ar,\ xq,\ axp+byq\,|}},$$

$$\overline{\underline{|\,r,\ q-xr,\ xp-yq,\ xp+yq+2zr\,|}},$$

$$\overline{\underline{|\,r,\ xq,\ xp-yq,\ xp+yq+2zr\,|}},$$

$$\overline{\underline{|\,r,\ q-xr,\ xq\,|}}, \qquad \overline{\underline{|\,r,\ xq,\ xp+q+(z-x)r\,|}},$$

$$\overline{\underline{|\,r,\ xp-yq,\ xp+yq+2zr\,|}}, \qquad \overline{\underline{|\,r,\ q-xr,\ axp+byq+(a+b)zr\,|}},$$

$\overline{|r,\ xq,\ axp+byq+(a+b)zr|}$, $\overline{|r,\ q-ar,\ xp+(y+x)q+2zr|}$,

$\overline{|r,\ p+xq+yr,\ xp+2yq+3zr|}$, $\overline{|r,\ xp+cyq+(1+c)zr|}$,

$\overline{|r,\ p+yq+(y+z)r|}$, $\overline{|r,\ p+xq+yr|}$,

$\overline{|r,\ q-xr|}$, $\overline{|r,\ xq|}$, $\overline{|r,\ xp+(y+x)q+2zr|}$, $\overline{|r|}$.

Es bleiben hiernach nur die Untergruppen der zweiten Art übrig.

Wir beschäftigen uns zunächst mit denjenigen Untergruppen der $\overline{G}$, in denen die eingliedrige Gruppe $xp+yq$ enthalten ist. Die aus ihnen sich ergebenden Gruppen der Γ_7 enthalten dann die infinitesimale Transformation $xp+yq+2zr+\alpha r$. Hier kann zunächst das Glied αr mit Hülfe der Transformation (T_1) zum Verschwinden gebracht werden. Wir wissen ferner, dass die infinitesimalen Transformationen der Γ_7:

$$r,\ p+yr,\ q-xr,\ xq,\ xp-yq,\ yp$$

bei der Combination mit $xp+yq+2zr$ mit einem constanten Faktor reproduciert werden, und dass derselbe nur für r den Wert 2 besitzt. Bedeutet daher Xf irgend eine der infinitesimalen Transformationen

$$q-xr,\ p+yr,\ xq,\ xp-yq,\ yp,$$

so ist:

$$(Xf+\alpha r,\ xp+yq+2zr)\equiv \mu Xf+2\alpha r\equiv \mu(Xf+\alpha r),$$

also $\mu\alpha=2\alpha$, und es ist daher, da μ von 2 verschieden ist, $\alpha=0$. Die hierher gehörigen Gruppen II^b, II^c, III^d, IIIe, IVe liefern daher die folgenden Untergruppentypen der Γ_7:

$\overline{|q-xr,\ xq,\ xp-yq,\ xp+yq+2zr|}$,

$\overline{|xq,\ xp-yq,\ yp,\ xp+yq+2zr|}$,

$\overline{|q-xr,\ xp-yq,\ xp+yq+2zr|}$,

$\overline{|xq,\ xp-yq,\ xp+yq+2zr|}$,

$$\overline{\left| xp-yq,\ xp+yq+2zr \right|}.$$

In ganz analoger Weise entspringen aus den Gruppen IV^d, IV^i, IV^k, V^b, V^g die Typen:

$$\overline{\left| xq,\ xp+q+(z-x)r \right|},$$

$$\overline{\left| q-xr,\ xp+(y+x)q+2zr \right|},$$

$$\overline{\left| p+xq+yr,\ xp+2yq+3zr \right|},$$

$$\overline{\left| p+yq+(y+z)r \right|}, \qquad \overline{\left| xp+(y+x)q+2zr \right|}.$$

Aus III^a ferner folgt, wie man durch Bildung der Klammerausdrücke leicht beweist; die Gruppe:

$$\overline{\left| xq,\ xp-yq,\ yp \right|}.$$

Den Typen $p-2xq$ und q entsprechen zunächst innerhalb der Γ_7 die Gruppen $p-2xq+yr+\alpha r$, bez. $q-xr+\alpha r$. In beiden Fällen lässt sich aber mit Hülfe der Transformationen (T_3) bez. (T_2) das Glied αr zum Verschwinden bringen und es ergeben sich die Typen:

$$\overline{\left| p+xq+yr \right|}, \qquad \overline{\left| q-xr \right|}.$$

Durch IV^a und V^d sind ferner die Gruppen bestimmt:

$$q-xr+\alpha r,\ xq+\alpha' r \text{ bez } xq+\beta r.$$

In $q-xr+\alpha r$ schaffen wir vermittelst der Transformation (T_2) das Glied αr fort; hierdurch erhält die erste dieser Gruppen die Form:

$$q-xr,\ xq+\beta r.$$

Ist $\beta=0$, so finden wir den Typus

$$\overline{\left| q-xr,\ xq \right|};$$

ist dagegen β von Null verschieden, so wenden wir die Transformation (T_5) an und machen $\beta=-1$; so erhalten wir den weiteren Typus:

$$\overline{\left| q-xr,\ xq-r \right|}.$$

Dieselbe Unterscheidung zwischen $\beta=0$ und $\beta=-1$ wen-

den wir auch auf die Gruppe $xq+\beta r$ an und bekommen die Typen:

$$\boxed{xq}, \qquad \boxed{xq-r}.$$

Wir gehen endlich zur Discussion der Fälle III^b, IV^f, IV^g und V^a über. Im ersten Falle hat die entsprechende Untergruppe der Γ_7 die Form:

$$q-xr+\alpha_1 r, \; xq+\alpha_2 r, \; axp+byq+(a+b)zr+\alpha_3 r.$$

Ihre infinitesimalen Transformationen seien der Reihe nach mit X_1f, X_2f, X_3f bezeichnet.

Es sei zunächst $a+b$ verschieden von Null. Dann gestattet die Transformation (T_1) das Glied $\alpha_3 r$ zum Verschwinden zu bringen, und die Combination von X_3f mit X_1f und X_2f ergiebt:

$$(X_1X_3) \equiv b(q-xr)+\alpha_1(a+b)r \equiv bX_1f+a\alpha_1 r,$$
$$(X_2X_3) \equiv (b-a)xq+\alpha_2(a+b)r \equiv (b-a)X_2f+2a\alpha_2 r.$$

Ist daher a von Null verschieden, so wird $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, und wir finden den Typus:

$$\text{(A)} \qquad \boxed{q-xr, \; xq, \; axp+byq+(a+b)zr}$$

Ist $a=0$, so wird $X_3f \equiv yp+zr$. Mit Hülfe der Transformation (T_2), welche die Form von X_3f unverändert lässt, machen wir dann $\alpha_1 = 0$. Hierbei gewinnt X_2f die Gestalt $xq+\beta r$. Je nachdem nun β Null oder von Null verschieden ist — im letzten Falle können wir erreichen, dass $\beta = -1$ wird —, erhalten wir die Typen:

$$\boxed{q-xr, \; xq, \; yp+zr}, \qquad \boxed{q-xr, \; xq-r, \; yp+zr}.$$

Den ersten Typus vereinigen wir mit dem unter (A) gefundenen, indem wir a nachträglich auch den Wert 0 freilassen.

Ist $a+b=0$, also $X_3f \equiv xp-yq+\alpha_3 r$, so wird

$$(X_1X_3) \equiv -q+xr, \; (X_2X_3) = -2xq,$$

mithin $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Wenn dann α_3 von Null verschieden ist, so machen wir diese Constante vermittelst der Trans-

formation (T_5) gleich -1 und finden die Gruppe:

$$\overline{|q-xr,\ xq,\ xp-yq-r|}.$$

Der Fall, dass $\alpha_8 = 0$ ist, ist wiederum in dem obigen allgemeinen Typus (A) enthalten, sobald wir a und b keiner Beschränkung mehr unterwerfen.

Eine ganz ähnliche Discussion ergiebt für die Gruppen IV^f, IV^g und V^a die Typen:

$$\overline{|xq-r,\ yp+zr|},\quad \overline{|xq,\ axp+byq+(a+b)zr|},\quad \overline{|xq,\ xp-yq-r|},$$

$$\overline{|q-xr,\ xp-yq-r|},\quad \overline{|q-xr,\ axp+byq+(a+b)zr|},$$

$$\overline{|xp-yq-r|},\quad \overline{|xp+cyq+(1+c)zr|}.$$

§ 5.

Im Folgenden werden die gefundenen Untergruppen der G_7, ihrer Gliederzahl nach geordnet, tabellarisch zusammengestellt, und zwar sofort in der Weise, wie es für die spätere Discussion dieser Gruppen zweckmässig erscheint. Dabei soll immer für $z-\frac{1}{2}xy$ zur Abkürzung Z gesetzt werden.

7-gliedrig:

1) $\overline{|1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy.\ y^2,\ Z|}.$

6-gliedrig:

2) $\overline{|1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2|}$, 3) $\overline{|1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ Z|}.$

5-gliedrig:

4) $\overline{|1,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ Z|}$, 5) $\overline{|1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy|}$,

6) $\overline{|1,\ x,\ y,\ xy,\ Z|}$, 7) $\overline{|1,\ x,\ y,\ x^2,\ Z|}$,

8) $\overline{|1,\ x,\ x^2,\ xy,\ Z|}$, 9) $\overline{|1,\ x,\ y.\ x^2,\ z|}$,

10) $\overline{|1,\ x,\ y,\ x^2,\ Z+axy|}.$

4-gliedrig:

11) $|x^2,\ xy,\ y^2,\ Z|$, 12) $|1,\ x^2,\ xy,\ Z|$, 13) $|1,\ x^2,\ xy,\ y^2|$,

14) $|1,\ x,\ y,\ Z|$, 15) $|1,\ x,\ xy\ Z| \infty |x,\ x^2,\ xy,\ Z|$,

16) $|1,\ x,\ y,\ z|$, 17) $|1,\ x,\ x^2,\ Z| \infty |1,\ x,\ x^2,\ xy|$,

18) $|1,\ x,\ y,\ x^2|$, 19) $|1,\ x,\ x^2,\ z|$, 20) $|1, x, x^2+y, 3z-xy|$,

21) $|1, x, y, Z+\alpha xy|$, 22) $|1, x, y, xy|$, 23) $|1,\ x,\ x^2,\ Z+\alpha xy|$,

24) $|1,\ x,\ y,\ 2Z-x^2|$. 25) $|1,\ x,\ x^2,\ z-y|$.

3-gliedrig:

26) $|x^2,\ xy,\ y^2|$, 27) $|1, xy, Z| \infty |x^2, xy, Z|$,

28) $|1,\ x^2,\ Z| \infty |1,\ x^2,\ xy|$, 29) $|1,\ x^2,\ z| \infty |x, x^2+1, z|$,

30) $|1,\ x^2,\ Z+\alpha xy|$, 31) $|1,\ x,\ Z| \infty |x,\ x^2,\ xy|$,

32) $|1,\ x,\ y|$, 33) $|x,\ xy,\ Z|$,

34) $|x,\ x^2,\ Z| \infty |1,\ x,\ xy|$, 35) $|1,\ x,\ z| \infty |x,\ x^2,\ z|$,

36) $|1,\ x,\ x^2|$, 37) $|1,\ x,\ x^2+y|$,

38) $|1,\ x^2+y,\ 3z-xy|$, 39) $|1, x, Z+\alpha xy| \infty |x, x^2, Z+\alpha xy|$,

40) $|1, x, 2Z-x^2| \infty |x, x^2, xy+1|$, 41) $|1,\ x,\ z-y|$,

42) $|1,\ x^2,\ z-xy-2x|$.

2-gliedrig:

43) $|xy,\ Z|$, 44) $|x^2,\ z| \infty |1,\ xy|$,

45) $|x,\ x^2| \infty |1,\ x|$, 46) $|1,\ x^2| \infty |x,\ x^2+1|$,

47) $|1,\ x^2+y|$, 48) $|x,\ z-xy|$,

49) $|1,\ Z| \infty |x^2,\ xy|$, 50) $|1,\ z| \infty |x^2,\ z|$,

51) $\overline{|x,\ z|} \infty \overline{|x^2+1,\ z|}$, 52) $\overline{|1,\ Z+axy|} \infty \overline{|x^2,\ Z+axy|}$,

53) $\overline{|1,\ 2Z-x^2|} \infty \overline{|x^2,\ xy+1|}$, 54) $\overline{|x,\ Z|} \infty \overline{|x,\ xy|}$,

55) $\overline{|x^2+y,\ 3z-xy|}$, 56) $\overline{|x,\ Z+axy|}$,

57) $\overline{|x,\ 2Z-x^2|} \infty \overline{|x,\ xy+1|}$, 58) $\overline{|1,\ z-y|} \infty \overline{|x^2,\ z-xy-2x|}$.

1-gliedrig:

59) $\overline{|1|} \infty \overline{|x^2|}$, 60) $\overline{|x|} \infty \overline{|x^2+1|}$, 61) $\overline{|Z|} \infty \overline{|xy|}$,

62) $\overline{|z|}$, 63) $\overline{|x^2+y|}$, 64) $\overline{|Z+axy|}$,

65) $\overline{|2Z-x^2|} \infty \overline{|xy+1|}$, 66) $\overline{|z-y|}$.

Cap. 3.

Discussion der gefundenen Untergruppen der G_7.

Da bisher zur Reduction auf die vorstehenden canonischen Formen nur solche Transformationen angewendet wurden, die der G_7 angehören, so ist in den §§ 10 und 11 factisch die Aufgabe gelöst worden, überhaupt alle Typen von Untergruppen der G_7 zu bestimmen, während es sich für uns darum handelte, alle Untergruppen der G_{10} aufzusuchen, welche zugleich Untergruppen der G_7 sind. Es bedarf daher noch einer besonderen Untersuchung, um zu ermitteln, ob unter den oben gefundenen Typen von Untergruppen der G_7 es solche giebt, die durch irgend welche Transformationen der G_{10} in einander übergeführt werden können, und um alle Typen aufzustellen, die innerhalb der G_{10} nicht gleichberechtigt sind.

Diese Untersuchung wird im Folgenden in der Weise geführt, dass jede dieser Untergruppen durch die bei ihr invariant bleibende Punktfigur oder, wenn dies nicht ausreicht, durch gewisse Differentialinvarianten characterisiert wird.

Am durchsichtigsten gestaltet sich die geometrische Deutung für die Untergruppen der Γ_{10} des linearen Complexes. Es ist dabei vorteilhaft, sich der schon im § 2 eingeführten homogenen Punktcoordinaten $x_1 x_2 x_3 x_4$ zu bedienen, damit auch die unendlich fernen Gebilde, die gegenüber der Γ_{10} nichts Ausgezeichnetes mehr vor den im Endlichen gelegenen besitzen, in einfacher Weise der Betrachtung zugänglich gemacht werden.

§ 6.

In der Tabelle § 5 sind bereits diejenigen Untergruppen der G_7, welche innerhalb der G_{10} gleichberechtigt sind, unter einer Nummer zusammengefasst worden. Überall ist es, wenn man die entsprechende Untergruppe der Γ_{10} ins Auge fasst, die Transformation (T_9), die die Überführung leistet; nur bei den Gruppen (29), (46), (51) und (60) leistet dies die Transformation (T_{11}) in Verbindung mit (T_5)[1].

Indem nun die übrig bleibenden Untergruppen, ihrer Gliederzahl nach, besprochen werden, wird sich zeigen, dass es unmöglich ist, unter diesen irgend zwei Typen ausfindig zu machen, die innerhalb der Γ_{10} gleichberechtigt sind.

Die Γ_7:

$$(1)\quad \begin{array}{|c|} x_4 p_3,\ x_4 p_2 - x_1 p_3,\ x_4 p_1 + x_2 p_3 \\ x_1 p_2,\ x_1 p_1 - x_2 p_2,\ x_2 p_1,\ x_3 p_3 - x_4 p_4 \end{array}$$

ist dadurch characterisiert, dass sie den Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, mithin auch die ihm von Complex zugeordnete Ebene $x_4 = 0$, stehen lässt. Gleichzeitig bleibt natürlich das ebene Büschel von Complexgeraden

[1]) Geht man nur darauf aus, festzustellen, welche von den gefundenen Untergruppen innerhalb der Γ_{10} gleichberechtigt sind, so lässt sich die Untersuchung mit Hülfe einer Bemerkung des Herrn Prof. *Lie* beträchtlich vereinfachen. Es können nämlich nur solche Untergruppen der Γ_7 innerhalb der Γ_{10} gleichberechtigt sein, die mindestens 2 Punkte stehen lassen.

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = 0,\ x_4 = 0$$

invariant, sowie die Schar von ∞^2 Nichtcomplexgeraden durch jenen Punkt

$$x_1 + a x_4 = 0,\ x_2 + b x_4 = 0,$$

wo a und b nur endliche Werte besitzen. Hieraus folgt, dass die Γ_7 imprimitiv ist; es gilt dies daher auch von allen ihren Untergruppen.

Die Gruppe

$$(2) \qquad \begin{array}{|c|} x_4p_3,\ x_4p_1 - x_1p_3,\ x_4p_1 + x_2p_3 \\ x_2p_1,\ x_1p_1 - x_2p_2,\ x_1p_2 \end{array}$$

ist nur dadurch vor der Γ_7 ausgezeichnet, dass sie, in Cartesischen Coordinaten geschrieben, den Pfaffschen Ausdruck

$$(A) \qquad dz + y\,dx - x\,dy$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, alle Volumina des Raumes invariant lässt.

Hält man ferner unter den Complexgeraden des invarianten Büschels in $x_4 = 0$ eine, etwa $x_1 = 0,\ x_4 = 0$ fest, so gelangt man von der Γ_7 aus zu dem zweiten Typus der sechsgliedrigen Gruppen:

$$(3) \qquad \begin{array}{|c|} x_4p_3,\ x_4p_2 - x_1p_3,\ x_4p_1 + x_2p_3 \\ x_1p_2,\ x\ p_1 - x_2p_2,\ x_3p_3 - x_4p_4 \end{array}.$$

Die Punkte der invarianten Geraden, mithin auch die Ebenen $x_1 - a x_4 = 0$, welche diese Gerade umhüllen, werden von der Gruppe zweigliedrig unter sich transformiert.

Damit ist nachgewiesen, dass die sechsgliedrigen Gruppen (2) und (3) wesentlich verschiedene Typen innerhalb der Γ_{10} darstellen.

Wir kommen zu den fünfgliedrigen Untergruppen der Γ_7.

Halten wir zunächst in der Schar von ∞^2 Nichtcomplexgeraden, die bei der Γ_7 invariant bleibt, eine Gerade, etwa $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ fest, so ergiebt sich die Gruppe:

$$(4) \qquad \begin{array}{|c|} x_4p_3,\ x_1p_2,\ x_1p_1 - x_2p_2,\ x_2p_1,\ x_3p_3 - x_4p_4 \end{array}.$$

Mit $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ bleibt zugleich die reciproke Polare $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ und die durch $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ bestimmte lineare Congruenz invariant.

Alle übrigen fünfgliedrigen Untergruppen der Γ_7 unterscheiden sich von (4) dadurch, dass sie keine Nichtcomplexgerade in Ruhe lassen. Sie alle sind Untergruppon der sechsgliedrigen Gruppe (3) und führen daher, wie die letztere, die Complexgerade $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ in sich selbst über.

Unter diesen ist nun zunächst die Gruppe

$$(5) \quad \boxed{x_4 p_3,\ x_4 p_2 - x_1 p_3,\ x_4 p_1 + x_2 p_3,\ x_1 p_2,\ x_1 p_1 - x_2 p_2}$$

dadurch characterisiert, dass sie alle Volumina des Raumes xyz unverandert lässt.

Hält man ferner in dem der Ebene $x_4 = 0$ zugeordneten Büschel von Complexgeraden ausser $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ noch die weitere $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ fest, so folgt aus (3) der Typus:

$$(6) \quad \boxed{x_4 p_3,\ x_4 p_2 - x_1 p_3,\ x_4 p_1 + x_2 p_3,\ x_1 p_1 - x_2 p_2,\ x_3 p_3 - x_4 p_4}.$$

Durch die Gruppe:

$$(7) \quad \boxed{x_4 p_3,\ x_4 p_2 - x_1 p_3,\ x_4 p_1 + x_2 p_3,\ x_1 p_2,\ x_3 p_3 - x_4 p_4}$$

werden zwar ebenfalls die Complexgeraden jenes Büschels eingliedrig transformiert, doch zum Unterscheid von (6) in der Weise, dass zwei in $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ zusammenfallende Strahlen invariant bleiben.

Zu weiteren Untergruppen gelangt man, wenn man die Forderung stellt, dass die Complexgeraden der Ebene $x_4 = 0$ zweigliedrig, die Punkte der invarianten Complexgeraden $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ eingliedrig transformiert werden sollen. Je nachdem dann auf der Geraden zwei getrennte Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ oder zwei in $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ zusammenfallende Punkte stehen bleiben, ergiebt sich die Gruppe

$$(8) \quad \boxed{x_4 p_3,\ x_4 p_2 - x_1 p_3,\ x_1 p_2,\ x_1 p_1 - x_2 p_2,\ x_3 p_3 - x_4 p_4}$$

bez.

$$(9) \qquad \left| \begin{array}{l} x_4p_3,\ x_4p_2-x_1p_3,\ x_4p_1+x_2p_3 \\ x_1p_2,\ x_1p_1-x_2p_2-x_3p_3+x_4p_4 \end{array} \right| .$$

Die Gruppe

$$(10) \qquad \left| \begin{array}{l} x_4p_3,\ x_4p_2-x_1p_3,\ x_4p_1+x_2p_3 \\ x_1p_2,\ \alpha(x_1p_1-x_2p_2)+x_3p_3-x_4p_4 \end{array} \right|$$

endlich besitzt die characteristische Eigenschaft, alle Transformationen der Γ_{10} zu umfassen, welche die Function

$$\frac{(z_1-z+x_1y-xy_1)^{\alpha+1}}{(x_1-x)^2}$$

der Coordinaten zweiter beliebiger Raumpunkte xyz, $x_1y_1z_1$ oder der Differentialausdruck:

$$(B) \qquad \frac{(dz+ydx-xdy)^{\alpha+1}}{dx^2}$$

gestattet.

Wir gehen zu den viergliedrigen Untergruppen der Γ_7 über.

Die Typen (11), (12), (13) zunächst sind Untergruppen der fünfgliedrigen (4) und lassen daher ebenso wie diese die durch die reciproken Polaren $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ bestimmte lineare Congruenz invariant. Unter einander sind dieselben in folgender Weise unterschieden: Während die Gruppe

$$(12) \qquad \left| x_4p_3,\ x_1p_2,\ x_1p_1-x_2p_2,\ x_3p_3-x_4p_4 \right|$$

auf jeder Directrix der Cougruenz einen Punkt stehen lässt, transformieren die beiden anderen die Punkte von $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ dreigliedrig, die von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ aber eingliedrig, und zwar bleiben bei der Gruppe

$$(11) \qquad \left| x_1p_2,\ x_1p_1-x_2p_2,\ x_2p_1,\ x_3p_3-x_4p_4 \right|$$

auf der letzteren Geraden zwei getrennte Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, bei der Gruppe

(13) $$\overline{|x_4p_3,\ x_2p_1,\ x_1p_1-x_2p_2,\ x_1p_2|}$$

als doppelt zählender Punkt $x_1=0$, $x_2=0$, $x_4=0$ in Ruhe.

Damit sind alle viergliedrigen Untergruppen erschöpft, welche eine Nichtcomplexgerade invariant lassen.

Verlangt man, dass alle Complexgeraden der Ebene $x_4=0$ in Ruhe bleiben sollen, so gelangt man zu dem Typus:

(14) $$\overline{|x_4p_3,\ x_4p_2-x_1p_3,\ x_4p_1+x_2p_3,\ x_3p_3-x_4p_4|}.$$

Sollen zwei getrennte Complexgerade dieser Schar sich invariant verhalten, so kann noch die weitere Forderung gestellt werden, dass auf einer der invarianten Geraden, etwa auf $x_1=0$, $x_4=0$ die Punkte eingliedrig transforformiert werden. Dies kann auf zweifache Weise geschehen, indem nämlich zwei getrennte oder zwei zusammenfallende Punkte ihre Lage bewehren; dem ersten Falle entspricht der Typus:

(15) $$\overline{|x_4p_3,\ x_4p_2-x_1p_3,\ x_1p_1-x_2p_2,\ x_3p_3-x_4p_4|},$$

dem zweiten Falle der Typus:

(16) $$\overline{|x_4p_3,\ x_4p_2-x_1p_3,\ x_4p_1+x_2p_3,\ x_1p_1-x_2p_2-x_3p_3-x_4p_4|}.$$

Die Gruppe (15) hat ausserdem die ihr eigenthümliche Beschaffenheit, die Schar von Flächen zweiten Grades

$$z+xy=const.$$

invariant zu lassen.

Ganz in derselben Weise ergeben sich, wenn man in $x_4=0$ zwei in $x_1=0$, $x_4=0$ zusammenfallende Complexgerade und auf dieser entweder zwei discrete oder einen doppeltzählenden Punkt festhält, die Gruppen:

(17) $$\overline{|x_4p_3,\ x_4p_2-x_1p_3,\ x_1p_2,\ x_3p_3-x_4p_4|},$$

bez.

(18) $$\overline{|x_4p_3,\ x_4p_2-x_1p_3,\ x_4p_1+x_2p_3,\ x_1p_2|}.$$

Die Möglichkeit endlich, dass die Complexgeraden des Büschels in $x_4 = 0$ zweigliedrig transformiert werden, aber alle Punkte der invarianten Complexgeraden $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ stehen bleiben, liefert den Typus:

$$(19) \quad \left| x_4 p_3,\ x_4 p_2 - x_1 p_3,\ x_1 p_2,\ x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3 + x_4 p_4 \right| .$$

Gleichzeitig lässt dieselbe alle Ebenen $x = const$ invariant, ist also intransitiv.

Die Gruppe

$$(20) \quad \left| \begin{array}{c} x_4 p_3,\ x_4 p_2 - x_1 p_3,\ x_4 p_1 + x_1 p_2 + x_2 p_3, \\ 3(x_3 p_3 - x_4 p_4) - x_1 p_1 + x_2 p_2 \end{array} \right|$$

ferner ist innerhalb der Γ_{10} dadurch definiert, dass sie die Schar von Flächen zweiten Grades

$$\frac{2x_4 x_2 - x_1^2}{x_4^2} = const.$$

oder in Cartesischen Coordinaten geschrieben:

$$x^2 - 2y = const.$$

in Ruhe lässt.

Die Gruppe

$$(22) \quad \left| x_4 p_3,\ x_4 p_2 - x_1 p_3,\ x_4 p_1 + x_2 p_3,\ x_1 p_1 - x_2 p_2 \right|$$

besitzt dieselbe invariante Punktfigur, wie die fünfgliedrige (6), von der sie Untergruppe ist; sie ist vor der fünfgliedrigen nur dadurch ausgezeichnet, dass bei ihr alle Volumina des Raumes invariant bleiben.

Aus der fünfgliedrigen Gruppe (10) gehen weiterhin die Typen

$$(21) \quad \left| \begin{array}{c} x_4 p_3,\ x_4 p_2 - x_1 p_3,\ x_4 p_1 + x_2 p_3, \\ \alpha(x_1 p_1 - x_2 p_2) + x_3 p_3 - x_4 p_4 \end{array} \right|$$

bez.

$$(23) \quad \left| x_4 p_3,\ x_4 p_2 - x_1 p_3,\ x_1 p_2,\ \alpha(x_1 p_1 - x_2 p_2) + x_3 p_3 - x_4 p_4 \right|$$

hervor, indem man ausser der bereits bei jener invarianten

Complexgeraden $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und dem auf ihr liegenden festen Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ entweder noch die Complexgerade $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ oder auf $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ noch den Schnittpunkt mit der Ebene $x_3 = 0$ festlegt. Zu dem ersten dieser Typen ist zu bemerken, dass zwei Gruppen, in denen α entgegengesetzt gleiche Werte besitzt, vermittelst der Transformation (T_8) in einander übergeführt werden können, also bereits innerhalb der Γ_7 gleichberechtigt sind.

Die Gruppe

$$(24) \quad \left| x_4p_3,\ x_4p_2-x_1p_3,\ x_4p_1+x_2p_3,\ x_1p_2+x_3p_3-x_4p_4 \right|$$

ferner besitzt die innerhalb der Γ_{10} nur ihr zukommende Eigenschaft, dass bei allen ihren Transformationen die Function

$$(x_1-x)e^{-\frac{y_1-y}{x_1-x}}$$

der Coordinaten zweiter variabler Punkte xyz, $x_1y_1z_1$ oder der Differentialausdruck

$$(C) \quad dxe^{-\frac{dy}{dx}}$$

sich invariant verhält. Die Punktfigur, welche sie stehen lässt, ist dieselbe wie für die fünfgliedrige Gruppe (7); sie besteht aus zwei in $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ zusammenfallenden Complexgeraden des der Ebene $x_4=0$ zugeordneten Büschels.

In ähnlicher Weise kann die Gruppe:

$$(25) \quad \left| \begin{matrix} x_4p_3,\ x_4p_2-x_1p_3,\ x_1p_2, \\ (x_1-2x_4)p_1-x_2p_2-(x_3+2x_2)p_3+x_4p_4 \end{matrix} \right|$$

als Gruppe aller Transformationen der Γ_{10} gedeutet werden, bei welcher die Function $\frac{z_1-z+x_1y-y_1x}{e^x}$ oder der Differentialausdruck $\frac{dz+ydx-xdy}{e^x}$ invariant bleibt. Ganz so wie die Gruppe (9) lässt sie die Complexgerade $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und auf ihr doppeltzählend den Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ inRuhe.

Damit ist das gestellte Problem auch für die viergliedrigen Untergruppen der Γ_7 erledigt.

Unter den dreigliedrigen Untergruppen der Γ_7 wollen wir von Anfang an zwei Gattungen unterscheiden, je nachdem eine Nichtcomplexgerade invariant bleibt oder nicht.

Wir untersuchen zunächst die der ersten Gattung.

Hier ist in erster Linie die Gruppe

$$(26) \qquad \left| x_1p_2,\ x_1p_1 - x_2p_2,\ x_2p_1 \right|$$

dadurch characterisiert, dass sie alle Punkte der Nichtcomplexgeraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, aber keinen auf ihrer reciproken Polaren $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ stehen lässt. Sie transformiert jeden Punkt des Raumes xyz auf einer bestimmten Ebene $z = const.$, ist also intransitiv.

Alle anderen Typen von der verlangten Beschaffenheit sind als Untergruppen in der viergliedrigen (12) enthalten und lassen daher sämmtlich auf jeder der Nichtcomplexgeraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ einen einzelnen Punkt, nämlich $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ in Ruhe. Jede dieser Gruppen hat aber noch eine besondere Eigenthümlichkeit. Während bei der Gruppe

$$(27) \qquad \left| x_4p_3,\ x_1p_1 - x_2p_2,\ x_3p_3 - x_4p_4 \right|$$

zwei getrennte Punkte der Geraden $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ fest bleiben, nämlich $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ und $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, fallen bei der Gruppe

$$(28) \qquad \left| x_4p_3,\ x_1p_2,\ x_3p_3 - x_4p_4 \right|$$

diese beiden invarianten Punkte in den einen $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ zusammen.

Die viergliedrigen Gruppe (12) lässt auch die Complexgerade $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, die Verbindungslinie der bei ihr invarianten Punkte, stehen. Verlangt man nun, dass auf dieser Geraden alle Punkte ihrer Lage beibehalten sollen, so findet man die offenbar intransitive Gruppe:

$$(29) \qquad \left| x_4p_3,\ x_1p_2,\ x_1p_1 - x_2p_2 - x_3p_3 + x_3p_4 \right| .$$

Die Gruppe

$$(30) \qquad \left| x_4p_3,\ x_1p_2,\ \alpha(x_1p_1 - x_2p_2) + x_3p_3 - x_4p_4 \right|$$

endlich umfasst alle Transformationen jener viergliedrigen (12), welche den Differentialausdruck (B) invariant lassen.

Bei allen übrigen dreigliedrigen Gruppen bleibt keine Gerade in Ruhe, die dem Complex nicht angehört.

Befinden sich zunächst alle ∞^1 Complexgeraden der Ebene $x_4 = 0$ in Ruhe, so können wir noch auf einer dieser Geraden, etwa auf $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, einen Punkt festhalten. Je nachdem nun dieser von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ getrennt — in $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ — liegt oder mit $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ zusammenfällt, ergiebt sich der Typus:

$$(31) \qquad \left| x_4p_3,\ x_4p_2 - x_1p_3,\ x_3p_3 - x_4p_4 \right|$$

bez.

$$(32) \qquad \left| x_4p_3,\ x_4p_2 - x_1p_3,\ x_4p_1 + x_2p_3 \right| .$$

Es mögen jetzt nun zwei discrete Complexgeraden in $x_4 = 0$, etwa $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ in Ruhe bleiben. Hält man dann gleichzeitig alle Punkte der einen von diesen Geraden, $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ fest, so hat die Gruppe die Form:

$$(35) \qquad \left| x_4p_3,\ x_4p_2 - x_1p_3,\ x_1p_1 - x_2p_2 - x_3p_3 + x_4p_4 \right| .$$

Ist ausser jenen Geraden noch eine dritte Complexgerade, die nicht in $x_4 = 0$ verläuft, fest, etwa $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, so hat man den Typus:

$$(33) \qquad \left| x_4p_2 - x_1p_3,\ x_1p_1 - x_2p_2,\ x_3p_3 - x_4p_4 \right| ;$$

dieser besitzt die ausgezeichnete Eigenschaft, die Fläche zweiten Grades

$$x_1x_2 + x_3x_4 = 0$$

invariant zu lassen, zu deren Erzeugenden die drei Complexgeraden gehören.

Sind ferner zwei in $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ zusammenfallende Complexgeraden der Ebene $x_4 = 0$ fest, so gelangt man durch ein ähnliches Verfahren zu den Gruppen:

$$(36) \qquad \boxed{x_4p_3,\ x_4p_2 - x_1p_3,\ x_1p_2}$$

und

$$(34) \qquad \boxed{x_4p_2 - x_1p_3,\ x_1p_2,\ x_3p_3 - x_4p_4};$$

die erstere lässt alle Punkte der Geraden $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ stehen, ist also intransitiv, während die letztere ausser $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ noch die weitere Complexgerade $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ invariant lässt.

Die beiden Gruppen

$$(38) \qquad \boxed{x_4p_3,\ x_4p_1 + x_1p_2 + x_2p_3,\ 3(x_3p_3 - x_4p_4) - x_1p_1 + x_2p_2}$$

und

$$(37) \qquad \boxed{x_4p_3,\ x_4p_2 - x_1p_3,\ x_4p_1 + x_1p_2 + x_2p_3}$$

haben die gemeinsame Eigenschaft, die Schar von Flächen zweiten Grades:

$$\frac{x_1^2 - 2x_2x_4}{x_4^2} = const. = a$$

oder, in Cartesischen Coordination xyz geschrieben, $x^2 - 2y = a$ invariant zu lassen. Während aber die Gruppe (38) die Fläche $x^2 - 2y = 0$ dieser Schar in sich überführt, bleibt bei der Gruppe (37) keine Fläche derselben in Ruhe (— natürlich abgesehen von der bei beiden Gruppen invarianten ausgearteten Fläche $x_4 = 0$ der Schar). Ausserdem unterscheiden sich beide Gruppen noch darin, dass (38) die Complexgeraden der Ebene $x_4 = 0$ zweigliedrig, (37) dieselben eingliedrig transformiert.

Indem man ferner aus den Transformationen der Gruppe (23) alle diejenigen aussondert, die auch die Complexgerade $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ in Ruhe lassen, gelangt man zu dem Typus:

$$(39) \qquad \boxed{x_4p_3,\ x_4p_2 - x_1p_3,\ \alpha(x_1p_1 - x_2p_2) + x_3p_3 - x_4p_4}.$$

Aus den viergliedrigen (24) geht die Gruppe

$$(40) \qquad \boxed{x_4 p_3, \; x_4 p_2 - x_1 p_3, \; x_1 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_4}$$

hervor, wenn man fordert, dass auf der invarianten Geraden $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ noch der weitere Punkt $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ fest bleiben soll.

In ähnlicher Weise lässt sich die Gruppe

$$(41) \qquad \boxed{x_4 p_3, \; x_4 p_2 - x_1 p_3, \; (2x_4 - x_1) p_1 + x_2 p_2 + (2x_2 + x_3) p_3 - x_4 p_4}$$

aus dem viergliedrigen Typus (25) ableiten, indem man ausser $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ noch die Complexgerade $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ festhält.

Für die Gruppe

$$(42) \qquad \boxed{x_4 p_3, \; x_1 p_2, \; x_1 p_1 - (x_2 - 2x_4) p_2 + x(_3 - 2x_1) p_3 - x_4 p_4}$$

endlich ist die bei ihr invariante Function

$$\frac{z_1 - z - (x_1 - x) l(x)}{x}$$

oder die Differentialinvariante

$$\frac{dz - l(x) dx}{x}$$

characteristisch. Die invariante Punktfigur besteht aus der Geraden $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ mit zwei ihrer Punkte: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Unter den zweigliedrigen Untergruppen der Γ_7 sind von vorn herein zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Transformationen derselben vertauschbar sind oder nicht.

Wir behandeln zunächst den ersten Fall, zu dem die Gruppen (43)—(48) zu zählen sind.

Hier ist in erster Linie die Gruppe

$$(43) \qquad \boxed{x_1 p_1 - x_2 p_2, \; x_3 p_3 - x_4 p_4}$$

dadurch ausgezeichnet, dass sie alle Ecken, mithin auch alle Kanten und Ebenen des Coordinatentetraeders invariant

lässt. Jeder Punkt des Raumes xyz wird bei allen ihren Transformationen auf einer bestimmten Fläche der Schar

$$\frac{xy}{z} = const.$$

fortgeführt.

Rückt der eine der auf der Nichtcomplexgeraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ invarianten Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ mit dem anderen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ zusammen, so ergiebt sich der Typus:

$$(44) \qquad \boxed{x_4 p_3, \ x_1 p_1 - x_2 p_2},$$

bei welchem jeder hyperbolische Cylinder

$$xy = const.$$

in sich übergeführt wird.

Die Gruppe

$$(46) \qquad \boxed{x_4 p_3, \ x_1 p_2}$$

endlich lässt auf den reciproken Polaren $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ je einen doppeltzählenden Punkt, auf deren Verbindungslinie $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ aber alle Punkte stehen, so dass jeder Punkt xyz des Raumes auf einer bestimmten Ebene $x = const.$ transformiert wird.

Von den bisher besprochenen unterscheiden sich die Gruppen (45), (47) und (48) wesentlich dadurch, dass sie keine Nichtcomplexgerade in Ruhe lassen.

Bei der Gruppe

$$(45) \qquad \boxed{x_4 p_3, \ x_4 p_2 - x_1 p_3}$$

zunächst bleiben sämtliche Complexgerade der Ebene $x_4 = 0$ und auf einer derselben, auf $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, alle Punkte invariant; die invarianten Flächen sind also die Ebenen $x = const.$ Anders die Gruppe

$$(47) \qquad \boxed{x_4 p_3, \ x_4 p_1 + x_1 p_2 + x_2 p_3};$$

sie lässt in $x_4 = 0$ nur die doppelt zählende Gerade $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und auf ihr den doppelt zählenden Punkt $x_1 = 0$,

$x_2 = 0$, $x_4 = 0$ stehen und führt jeden Punkt xyz des Raumes auf einer der Flächen

$$2y - x^2 = const.$$

fort. Bei den Transformationen der Gruppe

$$(48) \qquad \left| x_4p_2 - x_1p_3,\ x_1p_1 - x_2p_2 + x_3p_3 - x_4p_4 \right|$$

endlich bleiben die drei Complexgeraden $x_1 = 0$, $x_4 = 0$; $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ in Ruhe, sowie jede der Flächen zweiten Grades:

$$\frac{xy + z}{x} = const.$$

Alle übrigen zweigliedrigen Gruppen bestehen aus nicht vertauschbaren Transformationen. Unter ihnen fassen wir zunächst wieder diejenigen ins Auge, welche Nichtcomplexgerade invariant lassen.

Die Gruppe

$$(49) \qquad \left| x_1p_2,\ x_1p_1 - x_2p_2 \right|$$

führt jeden Punkt der Nichtcomplexgeraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und ausserdem den auf ihrer reciproken Polaren $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ gelegenen Punkt $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ in sich über. Die invarianten Flächen sind bei ihr die Ebenen $z = const.$ Nicht so die Gruppe:

$$(50) \qquad \left| x_4p_3,\ x_1p_1 - x_2p_2 - x_3p_3 + x_4p_4 \right|;$$

bei ihr bleiben alle Punkte der Complexgeraden $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und ausserdem auf $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ noch der Punkt $x_2 \;\; 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ fest. Jeder Punkt xyz des Raumes bewegt sich also auf einer bestimmten Ebene $x = const.$ Alle Ebenen dieser Schar gestatten auch die Gruppe:

$$(51) \qquad \left| x_4p_2 - x_1p_3,\ x_1p_1 - x_2p_2 - x_3p_3 + x_4p_4 \right|.$$

Doch liegt ein wesentlicher Unterschied zwischen ihr und dem eben betrachteten Typus darin, dass sie die Fläche zweiten Grades

$$x_1x_2 + x_3x_4 = 0$$

invariant lässt und auf ihr alle Erzeugenden der einen Schar

$$\lambda x_2 + \mu x_3 = 0,\ \lambda x_4 - \mu x_1 = 0.$$

Die Gruppe

(52) $\overline{| x_4 p_3,\ \alpha(x_1 p_1 - x_2 p_2) + x_3 p_3 - x_4 p_4 |}$

transformiert jeden Punkt xyz des Raumes auf einer bestimmten Fläche

$$\frac{z^{\alpha+1}}{x^2} = const.$$

Dabei sind, wie immer, die Werte 0 und -1 für α ausgeschlossen. Auch der Fall $\alpha = 1$ ist schon erledigt; denn die diesem Fall entsprechende Gruppe ist mit dem Typus (50) gleichberechtigt; man erkennt dies sofort, wenn man auf sie die Transformation (T_8) ausführt.

Die Gruppe

(53) $\overline{| x_4 p_3,\ x_1 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_4 |}$

endlich besitzt die characteristische Eigenschaft, jede der transcendenten Flächen

$$xe^{-\frac{y}{x}} = const.$$

invariant zu lassen. Auf der Geraden $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ lässt sie einen einzelnen Punkt $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_4 = 0$, auf der reciproken Polaren $x_3 = 0,\ x_4 = 0$ den doppeltzählenden Punkt $x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$ in Ruhe.

Wir kommen schliesslich zu denjenigen zweigliedrigen Gruppen mit nicht vertauschbaren Transformationen, welche keine Nichtcomplexgerade in Ruhe lassen.

Bei der Gruppe

(54) $\overline{| x_4 p_2 - x_1 p_3,\ x_1 p_1 - x_2 p_2 |}$

zunächst bleibt jede Complexgerade der Ebene $x_1 = 0$ und ausserdem die weitere $x_2 = 0,\ x_4 = 0$ invariant, und jeder Punkt des Raumes xyz bewegt sich bei allen ihren Transformationen auf einer Fläche der Schar

$$xy + z = const.$$

Für die Gruppe

$$(55)\qquad \boxed{x_4p_1+x_1p_2+x_2p_3,\ 3(x_3p_3-x_4p_4)-x_1p_1+x_2p_2}$$

ist das characteristisch, dass sie die gewundene Curve dritter Ordnung, welche dem Complex angehört,

$$x_1{}^2-2x_2x_4=0,\ 3x_3x_4-x_1x_2=0$$

und einen ihrer Punkte $x_1=0$, $x_2=0$, $x_4=0$, mithin auch die in diesem Punkte befindliche Tangente der Curve $x_1=0$, $x_4=0$ stehen lässt. Die invarianten Flächen bilden die Schar

$$\frac{z-xy+\frac{1}{3}x^3}{(2y-x^2)^{3/2}}=const.$$

Die Gruppe

$$(56)\qquad \boxed{x_4p_2-x_1p_3,\ \alpha(x_1p_1-x_2p_2)+x_3p_3-x_4p_4}$$

führt jede der drei Complexgeraden $x_1=0$, $x_4=0$; $x_2=0$, $x_4=0$ und $x_1=0$, $x_3=0$ in sich über und transformiert jeden Punkt des Raumes xyz auf einer bestimmten Fläche

$$\frac{(xy+z)^{\alpha+1}}{x^2}=const.,$$

wobei α von 0, $+1$ und -1 verschieden ist.

Bei der Gruppe

$$(57)\qquad \boxed{x_4p_2-x_1p_3,\ x_1p_2+x_3p_3-x_4p_4}$$

bleiben auf $x_4=0$ zwei in $x_1=0$, $x_4=0$ zusammenfallende Complexgerade und auf $x_1=0$ noch die weitere $x_1=0$, $x_3=0$ in Ruhe, ebenso jede Fläche der Schar

$$x\,.\,e^{-\frac{xy+z}{x^2}}=const.$$

Auch die Gruppe

$$(58)\qquad \boxed{x_4p_3,\ (x_1-2x_4)p_1-x_2p_2-(2x_2+x_3)p_3+x_4p_4}$$

lässt die Punkte des Raumes auf transcendenten Flächen

$$ye^{-x}=const.$$

laufen, die in diesem Falle Cylinder sind. Dabei behalten stets die Punkte $x_1=0$, $x_2=0$, $x_4=0$ und $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$ und ausser deren Verbindungslinie $x_2=0$,

$x_4 = 0$ noch die Complexgerade $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ ihre Lage im Raume bei.

Es erübrigt nur, die eingliedrigen Untergruppen noch kurz zu characterisieren.

Die Gruppe

$$(59) \qquad \boxed{x_4 p_3}$$

lässt alle ∞^2 Punkte der Ebene $x_4 = 0$ invariant. In den nichthomogenen Veränderlichen xyz hat sie die Form r und stellt eine infinitesimale *Translation* längs der z—*Axe* dar. Bahncurven sind also alle Parallelen zur z—*Axe*

$$x = a, \; y = b.$$

Anders die Gruppe

$$(62) \qquad \boxed{x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3 + x_4 p_4}.$$

Bei ihr bleiben alle Punkte der beiden windschiefen Complexgeraden $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ in Ruhe, mithin auch alle Begrenzungsflächen des Coordinatentetraeders und alle Ebenen, welche jene Geraden umhüllen. Die Bahncurven sind daher in diesem Falle alle Geraden, welche jene Complexgeraden schneiden:

$$ax_1 + a'x_4 = 0, \; bx_2 + b'x_3 = 0.$$

Die Gruppe

$$(60) \qquad \boxed{x_4 p_2 - x_1 p_3}$$

ferner lässt alle Punkte der Complexgeraden $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und sämtliche Complexgeraden, welche in den Ebenen $x_1 = 0$ und $x_4 = 0$ liegen, invariant. Die Bahncurven sind wiederum gerade Linien, deren Gleichungen die Form besitzen:

$$ax_1 + bx_4 = 0, \; bx_2 - ax_3 + cx_4 = 0.$$

Jeder Ebene $\frac{x_1}{x_4} = \alpha$ gehören ∞^1 Bahncurven an, die ein Strahlenbüschel bilden; der Mittelpunkt P desselben liegt natürlich auf $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und zwar so, dass die Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$; $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$

und P zusammen mit dem Punkte P', welchen der Complex der Ebene $\frac{x_1}{x_4} = \alpha$ zuordnet, ein harmonisches Doppelverhältnis bestimmen. Nur für die Ebenen $x_1 = 0$ und $x_4 = 0$ fallen die Punkte P und P' zusammen; nur in diesen Ebenen sind daher die Bahncurven Gerade, die dem Complex angehören.

Bei der Gruppe

$$(61) \qquad \boxed{x_1 p_1 - x_2 p_2}$$

ferner bleiben alle Punkte der Nichtcomplexgeraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und ausserdem zwei isolierte Punkte $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ invariant, während jeder andere Punkt des Raumes auf einem Kegelschnitt

$$\frac{x_1 x_2}{x_4^2} = a, \quad \frac{x_3}{x_4} = b$$

transformiert wird.

Die übrigen eingliedrigen Gruppen sind schon dadurch von den bisher aufgeführten verschieden, dass sie nur eine endliche Anzahl von Punkten des Raumes stehen lassen. So bleiben bei allen Transformationen der Gruppe

$$(64) \qquad \boxed{\alpha(x_1 p_1 - x_2 p_2) + x_3 p_3 - x_4 p_4},$$

wo α endlich und $\neq 0$, 1 oder -1 ist, — denn der Typus $x_1 p_1 - x_2 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_3$ ist mit $x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3 + x_4 p_4$ gleichberechtigt, wie man durch Anwendung der Transformation (T_8) leicht einsieht, — nur die vier Ecken des Coordinatentetraeders in Ruhe. Die Bahncurven haben, in Cartesischen Coordinaten geschrieben, die Form:

$$\frac{y^{\alpha+1}}{x^{\alpha-1}} = a, \quad \frac{z^{\alpha+1}}{x^2} = b.$$

Hält man die drei invarianten Eckpunkte, die in der Ebene $x_1 = 0$ liegen, fest, lässt dagegen den vierten invarianten Punkt mit $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ zusammenrücken, so hat man diejenige Punktfigur, welche die Gruppe

(65) $$\boxed{x_1 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_4}$$

characterisiert. Führt man auf einen beliebigen Punkt xyz des Raumes alle Transformationen der letzteren aus, so beschreibt dieser eine Curve:

$$xe^{-\frac{y}{x}} = a, \quad \frac{z}{x^2} = b.$$

Bei der Gruppe

(66) $$\boxed{(x_1 - 2x_4)p_1 - x_2 p_2 - (x_3 + 2x_2)p_3 + x_4 p_4}$$

bleiben nur zwei getrennte Punkte, nämlich die Schnittpunkte der Complexgeraden $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ mit den Ebenen $x_1 = 0$ und $x_4 = 0$, durch jeden dieser Punkte aber noch eine weitere Complexgerade $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ bez. $x_4 = 0$, $x_1 = 0$ in Ruhe, während jeder andere Punkt xyz des Raumes sich auf einer der Curven:

$$ye^{-x} = a, \quad \frac{xy - z}{y} = b$$

bewegt.

Die Gruppe

(63) $$\boxed{x_4 p_1 + x_1 p_2 + x_2 p_3}$$

endlich lässt nur einen Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ und in diesem eine Richtung, die der Complexgeraden $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, invariant. Die Bahncurve eines beliebigen Punktes xyz des Raumes ist für diese Gruppe von der Form:

$$x^2 - 2y = a, \; z + \tfrac{1}{3}x^3 - xy = b.$$

Hiermit ist der Nachweis geführt, dass es unmöglich ist, unter den aufgestellten 66 Typen von Untergruppen der Γ_7 irgend zwei ausfindig zu machen, welche innerhalb der Γ_{10} gleichberechtigt sind.

Cap. 4.

Bestimmung aller Untergruppen der G_{10}, die keinen Punkt des Raumes invariant lassen.

§ 7.

Nachdem es gelungen ist, alle Typen von Untergruppen der Γ_{10} zu bestimmen, welche einen Punkt des Raumes invariant lassen, handelt es sich noch darum, alle Typen von Untergruppen zu ermitteln, bei denen kein Punkt in Ruhe bleibt. Alle diese Typen werden mindestens dreigliedrig sein, denn jede zweigliedrige projective Gruppe lässt sicher einen Punkt des Raumes invariant.

Wir gehen zuerst auf die Bestimmung aller Untergruppen der Γ_{10} ein, bei denen eine Curve, aber kein Punkt des Raumes in Ruhe bleibt, und zwar untersuchen wir zunächst den Fall, dass diese Curve eine gewundene ist.

Jede Gruppe von dieser Beschaffenheit enthält eine zweigliedrige Untergruppe, die durch geeignete Transformationen der Γ_{10} in eine zweigliedrige Untergruppe der Γ_7 überführbar ist. Unter den zweigliedrigen Untergruppen der Γ_7, die sämtlich uns bekannt sind, findet sich aber nur eine, bei welcher eine gewundene Curve invariant bleibt, nämlich:

$$\left| p_1+x_1q_1+y_1r_1,\ x_1p_1+2y_1q_1+3z_1r_1 \right|$$

und diese lässt die gewundene Curve dritter Ordnung

$$x_1^2-2y_1=0,\ 3z_1-x_1y_1=0$$

invariant, die dem linearen Complex angehört. Es hat keine Schwierigkeit, sofort die grösste Untergruppe der Γ_{10} anzugeben, welche diese Curve gestattet. Dieselbe ist dreigliedrig und lautet:

$$\left| \begin{array}{l} p_1+x_1q_1+y_1r_1,\ x_1p_1+2y_1q_1+3z_1r_1, \\ (2y_1-3x_1^2)p_1+3(z_1-x_1y_1)q_1-3x_1z_1r_1 \end{array} \right|.$$

Die ihr entsprechende einzige Untergruppe der G_{10},

die eine gewundene Curve, aber keinen Punkt stehen lässt, hat die Form:

$$\left| x^2+y,\ 3z-xy,\ y^2-12xZ \right|.$$

§ 8.

Wir gehen über zur Bestimmung aller Untergruppen der Γ_{10}, die eine Complexgerade, aber keinen Punkt invariant lassen. Wie schon früher erwähnt wurde, ist diese Aufgabe identisch mit der anderen, alle Untergruppen der $\mathfrak{G}_{10}$ zu suchen, bei denen ein Punkt des Raumes, aber keine Gerade, die den unendlich fernen Kugelkreis schneidet, in Ruhe bleibt. Da diese Untergruppen durch Transformationen der $\mathfrak{G}_{10}$ in Untergruppen der siebengliedrigen Gruppe $\mathfrak{G}_7$ aller Ähnlickeitstransformationen des $\mathfrak{R}_3$

$$\left| p,\ q,\ r,\ xq-yp,\ yr-zq,\ zp-xr,\ xp+yq+zr \right|$$

übergeführt werden können, so kommt die Aufgabe darauf hinaus, alle Untergruppen der $\mathfrak{G}_7$ zu bestimmen, welche keinen Punkt des unendlich fernen Kugelkreises invariant lassen, die Punkte desselben also dreigliedrig transformieren. Da es nun nur die Rotationen sind, bei welchen die Punkte des Kugelkreises unter sich vertauscht werden, während die Translationen und die Ähnlichkeitstransformationen alle seine Punkte stehen lassen, so ist klar, dass jede der gesuchten Gruppen drei infinitesimale Transformationen von der Form

$$\begin{aligned} V_1f &\equiv xq-yp+\alpha_1p+\alpha_2q+\alpha_3r+\alpha_4U, \\ V_2f &\equiv yr-zq+\beta_1p+\beta_2q+\beta_3r+\beta_4U, \\ V_3f &\equiv zp-xr+\gamma_1p+\gamma_2q+\gamma_3r+\gamma_4U \end{aligned}$$

umfassen muss, wo zur Abkürzung $U\equiv xp+yq+zr$ gesetzt ist.

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass, wenn ausser V_1f, V_2f, V_3f noch eine Translation

$$Wf \equiv \alpha p + \beta q + \gamma r$$

in einer Gruppe von der verlangten Eigenschaft auftritt, gleichzeitig alle Translationen in ihr enthalten sind. In der That, aus den den Identitäten

$$(W, \; V_1) \equiv \alpha q - \beta p + \alpha_4 Wf \equiv W_1 f + \alpha_4 Wf,$$
$$(W_1, \; V_1) \equiv \alpha p + \beta q + \alpha_4 W_1 f,$$
$$(W_1, \; V_2) \equiv \beta r + \beta_4 W_1 f, \; (W_1, \; V_3) \equiv -\alpha r + \gamma_4 W_1 f$$

folgt, dass, da $\alpha\beta\gamma$ nicht sämtlich Null sein sollen, r, mithin, wie die Combination mit $V_2 f$ und $V_3 f$ lehrt, auch p und q vorkommen.

Suchen wir zunächst alle Untergruppen der $\mathfrak{G}_7$ von der geforderten Beschaffenheit, die keine Translation enthalten, so sind nur die beiden Fälle möglich, dass $V_1 f, \; V_2 f, \; V_3 f$ oder dass

$$W_1 f \equiv xq - yp + \alpha_{11} p + \alpha_{12} q + \alpha_{13} r$$
$$W_2 f \equiv yr - zq + \alpha_{21} p + \alpha_{22} q + \alpha_{23} r$$
$$W_3 f \equiv zp - xr + \alpha_{31} p + \alpha_{32} q + \alpha_{33} r$$
$$W_4 f \equiv xp + yq + zr + \alpha_{41} p + \alpha_{42} q + \alpha_{43} r$$

eine Gruppe bilden. Im ersten Falle folgt aus den Combinationen $(V_1 V_2)$, $(V_2 V_3)$ und $(V_3 V_1)$, dass

$$\alpha_4 = \beta_4 = \gamma_4 = 0, \; \alpha_3 = \beta_1 = \gamma_2 = 0,$$
$$\alpha_1 = -\beta_3, \; \beta_2 = -\gamma_1, \; \alpha_2 = -\gamma_3,$$

im zweiten Falle aus der Combination von $W_4 f$ mit $W_1 f$, $W_2 f$, $W_3 f$:

$$\alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{32} = 0,$$
$$\alpha_{12} = -\alpha_{33} = \alpha_{41}, \; \alpha_{11} = -\alpha_{23} = -\alpha_{42},$$
$$\alpha_{22} = -\alpha_{31} = -\alpha_{43}.$$

Es erhalten daher $V_1 f, \; V_2 f, \; V_3 f$ die Form:

$$V_1 f \equiv (x + \alpha_2) q - (y - \alpha_1) p,$$
$$V_2 f \equiv (y - \alpha_1) r - (z - \beta_3) q,$$
$$V_3 f \equiv (z - \beta_3) p - (x + \alpha_2) r.$$

Indem wir mit Hülfe der Transformation

$$x' = x + \alpha_2, \; y' = y - \alpha_1, \; z' = z - \beta_3$$

$x'y'z'$ als neue Variable einführen, ergiebt sich die Gruppe — wir lassen die Accente fort —

$$\overline{|xq-yp,\ yr-zq,\ zp-xr|}.$$

Die analoge Transformation:

$$x'=x+\alpha_{41},\ y'=y+\alpha_{42},\ z'=z+\alpha_{43}$$

bringt die Gruppe der Wf auf die Form:

$$\overline{|xq-yp,\ yr-zq,\ zp-xr,\ xp+yq+zr|}.$$

Treten endlich alle Translationen p, q, r auf, so ist die Gruppe entweder die $\mathfrak{G}_7$ selbst oder eine sechsgliedrige von der Gestalt:

$$p,\ q,\ r,\ xq-yp+\alpha U,\ yr-zq+\beta U,\ zp-xr+\gamma U.$$

Combiniert man aber die drei letzten unter sich, so folgt $\alpha=\beta=\gamma=0$, und man gelangt zu dem Typus:

$$\overline{|p,\ q,\ r,\ xq-yp,\ yr-zq,\ zp-xr|}.$$

Hiermit sind alle Möglichkeiten erschöpft. Wir finden also die Gruppe aller Rotationen, die Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen, die einen Punkt stehen lassen, die Gruppe aller Bewegungen und endlich die Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen des $\mathfrak{R}_3$.

Eine entsprechende einfache geometrische Deutung lassen die Untergruppen der Γ_{10} zu, die eine Complexgerade, aber keinen Punkt stehen lassen.

Bei der siebengliedrigen — wir bedienen uns wieder homogener Coordinaten —

$$\overline{\left|\begin{matrix} x_4p_3,\ x_4p_2-x_1p_3,\ x_1p_2,\ x_4p_1+x_2p_3,\ x_1p_1-x_2p_2 \\ x_3p_2+x_1p_4,\ x_3p_3-x_4p_4 \end{matrix}\right|}$$

bleibt die Complexgerade $x_1=0$, $x_4=0$ in Ruhe. Weiter ist die sechsgliedrige

$$\overline{\left|\begin{matrix} x_4p_3,\ x_4p_2-x_1p_3,\ x_1p_2,\ x_4p_1+x_2p_3, \\ x_1p_1-x_2p_2+x_3p_3-x_4p_4,\ x_3p_2+x_1p_4 \end{matrix}\right|}$$

dadurch characterisiert, dass sie alle Transformationen der Γ_{10} umfasst, die den Differentialausdruck

$$\frac{dz_1+y_1dx_1-x_1dy_1}{dx_1}$$

invariant lassen. Bei der viergliedrigen

$$\left| x_3p_2+x_1p_4,\ x_1p_1-x_2p_2,\ x_4p_1+x_2p_3,\ x_3p_3-x_4p_4 \right|$$

bleiben zwei zu einander windschiefe Complexgerade $x_1=0$, $x_4=0$ und $x_2=0$, $x_3=0$ fest. Es bleibt daher auch die Schar von ∞^1 Complexgeraden, welche jene Geraden schneiden, in Ruhe; dieselbe bildet die eine Schar von Erzeugenden der natürlich ebenfalls invarianten Fläche zweiten Grades

$$x_1x_2-x_3x_4=0.$$

Die andere Schar von Erzeugenden besteht mit Ausnahme der beiden in Ruhe bleibenden Geraden $x_1=0$, $x_4=0$ und $x_2=0$, $x_3=0$ aus Geraden, die dem Complex nicht angehüren. Hält man alle Erzeugenden dieser zweiten Schar fest, so gelangt man zur der dreigliedrigen:

$$\left| x_3p_2+x_1p_4,\ x_1p_1-x_2p_2+x_3p_3-x_4p_4,\ x_4p_1+x_2p_3 \right|.$$

Die entsprechenden Untergruppen der G_{10}, die keinen Punkt stehen lassen, lauten endlich:

$$\left| 1,\ x,\ x^2,\ y,\ xy,\ z,\ x(z-\tfrac{1}{2}xy) \right|,$$

$$\left| 1,\ x,\ x^2,\ y,\ xy-z,\ x(z-\tfrac{1}{2}xy) \right|,$$

$$\left| y,\ xy,\ z,\ x(z-\tfrac{1}{2}xy) \right|,$$

$$\left| y,\ xy-z,\ x(z-\tfrac{1}{2}xy) \right|.$$

§ 9.

Wir wenden uns zur Bestimmung aller Untergruppen der Γ_{10}, die eine Nichtcomplexgerade stehen lassen, aber keinen Punkt.

Da die Transformationen der Γ_{10} jede Nichtcomplexgerade in jede andere überzuführen gestatten, können wir als typischen Fall annehmen, dass die Nichtcomplexgerade $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, folglich auch ihre reciproke Polare $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, und die durch beide bestimmte lineare Congruenz invariant bleibt.

Die grösste Untergruppe der Γ_{10}, welche diese Bedingungen befriedigt, ist die sechsgliedrige:

$$\left| x_1 p_2,\ x_1 p_1 - x_2 p_2,\ x_2 p_1,\ x_3 p_4,\ x_3 p_3 - x_4 p_4,\ x_4 p_3 \right|.$$

Es handelt sich also darum, alle Untergruppen dieser Γ_6 zu bestimmen, welche keinen Punkt des Raumes stehen lassen.

Eine solche Untergruppe muss die Punkte auf jeder der beiden Nichtcomplexgeraden dreigliedrig transformieren. Sind daher

$$\overline{U}_i f \equiv \alpha_{i1} x_1 p_2 + \alpha_{i2}(x_1 p_1 - x_2 p_2) + \alpha_{i3} x_2 p_1 + \beta_{i1} x_3 p_4 + \beta_{i2}(x_3 p_3 - x_4 p_4) + \beta_{i3} x_4 p_3 \quad (i = 1, 2 \ldots k),$$

wo k natürlich $\geqq 3$, die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe, so sind weder in der Matrix

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{k1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{k2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{k3} \end{vmatrix} \quad \text{noch in der andern} \quad \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \ldots & \beta_{k1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{k2} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \ldots & \beta_{k3} \end{vmatrix}$$

alle dreigliedrigen Determinanten Null. Es lassen sich daher aus den $\overline{U}_i f$ stets linear drei infinitesimale Transformationen $U_1 f$, $U_2 f$, $U_3 f$ von der Form ableiten:

$$U_1 f \equiv x_3 p_4 + V_1 f,\quad U_2 f \equiv x_3 p_3 - x_4 p_4 + V_2 f,\quad U_3 f \equiv x_4 p_3 + V_3 f,$$

wo

$$V_j f \equiv \gamma_{j1} x_1 p_2 + \gamma_{j2}(x_1 p_1 - x_2 p_2) + \gamma_{j3} x_2 p_1.$$

Es lässt sich nun nachweisen, dass es keine vier- und keine fünfgliedrige Gruppe von der geforderten Eigenschaft giebt. Gesetzt nämlich, es gäbe eine solche und es wäre

$$Vf \equiv \alpha_1 x_1 p_2 + \alpha_2 (x_1 p_1 - x_2 p_2) + \alpha_3 x_2 p_1$$

eine infinitesimale Transformation, die mit $U_1 f$, $U_2 f$, $U_3 f$ in diese Gruppe einträte. Dann könnte zunächst Vf mit

Hülfe gewisser Transformationen der eingliedrigen Gruppen x_1p_2 und x_2p_1 entweder auf die Form x_1p_2 oder $x_1p_1-x_2p_2$ gebracht werden. Im ersten Falle könnten in U_1f, U_2f, U_3f alle $\gamma_{i1}=0$ gesetzt werden, und es dürften nicht alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \gamma_{12} \, \gamma_{22} \, \gamma_{32} \\ \gamma_{13} \, \gamma_{23} \, \gamma_{33} \end{vmatrix}$$

verschwinden. Wäre etwa $\gamma_{12}\gamma_{23}-\gamma_{13}\gamma_{22}\neq 0$, so würde aus:

$$(U_1, x_1p_2)\equiv 2\gamma_{12}x_1p_2-\gamma_{13}(x_1p_1-x_2p_2),$$
$$(U_2, x_1p_2)\equiv 2\gamma_{22}x_1p_2-\gamma_{23}(x_1p_1-x_2p_2)$$

folgen, dass auch $x_1p_1-x_2p_2$ der Gruppe angehört, folglich, da nicht alle γ_{i3} Null sein dürfen, falls etwa $\gamma_{13}\neq 0$, auch

$$(x_1p_1-x_2p_2, U_1)\equiv -2\gamma_{13}x_2p_1,$$

also x_2p_1. Die Gruppe wäre die Γ_6 selbst.

Nähme ferner Vf die Form $x_1p_1-x_2p_2$ an, so könnten wir alle $\gamma_{j2}=0$ setzen. Es dürften dann nicht alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} \, \gamma_{12} \, \gamma_{13} \\ \gamma_{31} \, \gamma_{32} \, \gamma_{33} \end{vmatrix}$$

verschwinden, und wenn etwa $\gamma_{11}\gamma_{23}-\gamma_{13}\gamma_{21}\neq 0$, so ergäbe sich aus

$$(x_1p_1-x_2p_2, U_1)\equiv 2\gamma_{11}x_1p_2-2\gamma_{13}x_2p_1,$$
$$(x_1p_1-x_2p_2, U_2)\equiv 2\gamma_{31}x_1p_2-2\gamma_{33}x_2p_1,$$

dass auch x_1p_2 und x_2p_1 der Gruppe angehörten.

Die einzige Möglichkeit ist daher die, dass U_1f, U_2f, U_3f eine Gruppe von der verlangten Beschaffenheit erzeugen.

Ist dies der Fall, so verschwindet sicher die Determinante

$$D\equiv \Sigma\pm\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}$$

nicht. Führt man nun mit Hülfe der Transformation

$$\alpha) \qquad x_1'=x_1,\ x_2'=x_2+x_1t,\ x_3'=x_3,\ x_4'=x_4$$

$x_1'\,x_2'\,x_3'\,x_4'$ als neue Veränderliche ein, so geht U_2f über in

$$U_2'f\equiv x_3'p_3'-x_4'p_4'+(\gamma_{21}+2t\gamma_{22}-t^2\gamma_{23})x_1'p_2'$$
$$+(\gamma_{22}-\gamma_{23}t)(x_1'p_1'-x_2'p_2')+\gamma_{23}x_2'p_1',$$

γ_{22} und γ_{23} können aber nicht gleichzeitig Null sein, sonst wäre:

$$(U_1 U_2) \equiv -2 U_1 f \equiv -2x_3 p_4 + 2\gamma_{21}\gamma_{12} x_1 p_2 - \gamma_{13}\gamma_{21}(x_1 p_1 - x_2 p_2)$$

also $\gamma_{13} = 0$, $\gamma_{11} = -\gamma_{21}\gamma_{12}$, $2\gamma_{12} = \gamma_{13}\gamma_{21}$

oder $\gamma_{11} = \gamma_{12} = \gamma_{13} = 0$,

was der Voraussetzung $D \neq 0$ widerspricht. Es giebt daher stets einen endlichen Wert von t, der $\gamma_{21} + 2t\gamma_{22} - t^2\gamma_{23}$ zum Verschwinden bringt. Dieser kann aber nicht zugleich $\gamma_{22} - \gamma_{23} t$ gleich Null machen: sonst würde, wenn mit

$$U_1'f \equiv x_3'p_4' + \gamma_{11}'x_1'p_2' + \gamma_{12}'(x_1'p_1' - x_2'p_2') + \gamma_{13}'x_2'p_1'$$

die infinitesimale Transformation bezeichnet wird, in die $U_1 f$ nach Ausführung der Transformation α) übergeht, die Combination von $U_1'f$ und $U_2'f$ ergeben, dass alle $\gamma_{1i}' = 0$ sind, was unmöglich ist. $U_2'f$ erhält daher die Form:

$$x_3'p_3' - x_4'p_4' + \mu_1 x_1'p_2' + \mu_2'(x_1'p_1' - x_2'p_2'),$$

wo $\mu_2 \neq 0$. Mit Hülfe einer Transformation der eingliedrigen Gruppe $x_2'p_1'$ lässt sich schliesslich das Glied $x_1'p_2'$ entfernen, so dass — wir lassen in der Folge die Accente wieder weg —:

$$U_1 f \equiv x_3 p_4 + \alpha_1 x_1 p_2 + \alpha_2(x_1 p_1 - x_2 p_2) + \alpha_3 x_2 p_1,$$
$$U_2 f \equiv x_3 p_3 - x_4 p_4 + \mu(x_1 p_1 - x_2 p_2),$$
$$U_3 f \equiv x_4 p_3 + \gamma_1 x_1 p_2 + \gamma_2(x_1 p_1 - x_2 p_2) + \gamma_3 x_2 p_1,$$

wo $\mu \neq 0$. Aus der Combination dieser drei infinitesimalen Transformationen unter einander folgt:

$$\alpha_2 = \gamma_2 = 0,\ \alpha_1\mu = \alpha_1,\ -\alpha_3\mu = \alpha_3,$$
$$-\gamma_1\mu = \gamma_1,\quad \gamma_3\mu = \gamma_3,\ \alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1 = \mu.$$

Da $\mu \neq 0$, so ergiebt sich entweder

$$\mu = 1,\ \alpha_3 = \gamma_1 = 0,\ \gamma_3 = \frac{1}{\alpha_1},$$

oder

$$\mu = -1,\ \alpha_1 = \gamma_3 = 0,\ \gamma_1 = \frac{1}{\alpha_3}.$$

Schliesslich kann man mit Hülfe einer Transformation der

eingliedrigen Gruppe $x_1p_1 - x_2p_2$ α_1 bez. α_3 gleich -1 machen. Wir finden so die canonischen Formen:

β) $\boxed{x_1p_2 - x_3p_4,\ x_1p_1 - x_2p_2 + x_3p_3 - x_4p_4,\ x_2p_1 - x_4p_3}$

und

γ) $\boxed{x_1p_2 - x_4p_3,\ x_1p_1 - x_2p_2 - x_3p_3 + x_4p_4,\ x_2p_1 - x_3p_4}$.

Dieselben sind innerhalb der Γ_{10} gleichberechtigt; die Transformation

$$x_1' = x_2,\ x_2' = -x_1,\ x_3' = x_4,\ x_4' = -x_3$$

führt die eine in die andere über. Da ferner die Transformation (T_{12}) die Gruppe (β) mit der uns bereits bekannten

$$\boxed{x_3p_2 + x_1p_4,\ x_1p_1 - x_2p_2 + x_3p_3 - x_4p_4,\ x_4p_1 + x_2p_3}$$

vertauscht, so stellt einen neuen Typus von Untergruppen der Γ_{10} nur die sechsgliedrige dar, die eine Nichtcomplexgerade invariant lässt. Die ihr innerhalb der G_{10} entsprechende Gruppe lautet:

$$\boxed{1,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ z,\ (z - \tfrac{1}{2}xy)^2}.$$

§ 10.

Wir wenden uns zur Erledigung aller Untergruppen der Γ_{10}, die eine krumme Fläche, aber weder eine Curve noch einen Punkt invariant lassen. Es wird sich zeigen, dass es keine Untergruppe von dieser Beschaffenheit giebt[1]).

Auf jeder Fläche $f(xyz) = 0$, die eine r-gliedrige Untergruppe der Γ_{10} gestattet, liegen ∞^1 Curven, die dem linearen Complex angehören, nämlich die auf dieser Fläche liegenden Integralcurven des simultanen Systems:

$$df = 0,\ dz + ydx - xdy = 0.$$

Diese Schar von ∞^1 Curven bleibt ebenfalls bei der r-glied-

[1]) Die eingeschlagene Methode verdankt der Verfasser in den wesentlichen Punkten einer Mitteilung des Herrn Prof. *Engel*.

rigen Gruppe invariant, und zwar giebt es, wenn diese Γ_r den gestellten Forderungen genügt, in der Schar keine Curve, die bei allen Transformationen der Γ_r in sich übergeführt wird. Die Γ_r besitzt aber sicher eine $r-1$ gliedrige Untergruppe Γ_{r-1}, die eine Curve der Schar in Ruhe lässt. Bliebe nun auf dieser Curve zugleich ein Punkt fest, so würde derselbe bei allen Transformationen der Γ_r entweder gleichfalls invariant bleiben oder eine Curve beschreiben; in beiden Fällen wäre die Γ_r aber mit einem der schon bestimmten Typen von Untergruppen der Γ_{10} gleichberechtigt. Es darf daher auf jener Complexcurve, die die Γ_{r-1} zulässt, nicht gleichzeitig ein Punkt sich invariant verhalten. Mit Hülfe der Transformationen der Γ_{10} kann nun erreicht werden, dass die Γ_{r-1} eine der von uns aufgestellten canonischen Formen annimmt. In der Zahl der Untergruppen der Γ_7, die eine Complexcurve jedoch keinen Punkt derselben stehen lassen, finden sich aber, wie wir gesehen haben, nur drei, bei denen gleichzeitig eine krumme Fläche invariant bleibt: nämlich die dreigliedrige, die eine gewundene Curve dritter Ordnung und daher auch ihre abwickelbare Fläche in Ruhe lässt, und ferner eine drei- und eine viergliedrige, welche beide zwei zu einander windschiefe Complexgerade und die durch diese Geraden bestimmte Fläche zweiten Grades $x_1x_2-x_3x_4=0$ stehen lassen.

Jede Untergruppe der Γ_{10}, bei welcher jene abwickelbare Fläche in Ruhe bleibt, transformiert die ∞^1 Complexcurven, das sind die Erzeugenden dieser Fläche, unter sich und lässt die Rückkehrcurve der Fläche, also die gewundene Curve dritter Ordnung invariant. Die grösste Untergruppe der Γ_{10} aber, die diese gestattet, ist eben jene dreigliedrige.

Auf der Fläche $x_1x_2-x_3x_4=0$ ferner, die jene drei- und viergliedrige gestattet, hat die eine Schar von Erzeugenden

$$ax_1-a'x_3=0, \quad a'x_2-ax_4=0$$

die Eigentümlichkeit, dass alle ihre Geraden nicht dem

Complex angehören mit Ausnahme allein der beiden getrennten Geraden $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Da bei allen Transformationen der Γ_{10} nun Complexgerade stets in ebensolche und Nichtcomplexgerade wieder in Nichtcomplexgerade übergehen, so giebt es offenbar keine Untergruppe der Γ_{10}, die keine Erzeugende jener Schar auf der invarianten Fläche $x_1x_2 - x_3x_4 = 0$ stehen lässt.

Damit ist nachgewiesen, dass die Γ_{10} keine Untergruppe besitzt, bei welcher eine krumme Fläche, aber weder eine Curve noch ein Punkt in Ruhe bleibt. Auf einem kürzeren Wege gelangt man zu diesem Resultate, wenn man sich auf den von *Lie*[1]) bewiesenen Satz stützt, dass ausser den Ebenen und Kegelflächen nur die Flächen zweiten Grades, die Abwickelbare einer gewundenen Curve dritter Ordnung und die Cayleysche Linienfläche dritter Ordnung mehr als zwei projective infinitesimale Transformationen gestatten. Auf Ebenen und Kegelflächen bleibt gleichzeitig ein Punkt, auf den letztgenannten Flächen aber je eine Curve bei allen Transformationen der Γ_{10}, die sie gestatten, invariant.

§ 11.

Schliesslich könnte die Γ_{10} noch Untergruppen besitzen, die keine Punktfigur stehen lassen. Nach einem Satze von *Lie*[2]) giebt es aber in R_3 nur eine projective Gruppe von dieser Beschaffenheit, nämlich die Γ_{10} selbst. Man kann aber auch unabhängig von diesem Satze einsehen, dass keine Untergruppe der verlangten Art existiert.

Wir stützen uns zum Beweise, der im Folgenden nur angedeutet werden soll, auf den Satz, dass alle Untergruppen der Γ_{10} imprimitiv sind. In der That, wenn eine Untergruppe der Γ_{10} einen Punkt stehen lässt, so werden die ∞^2 Nichtcomplexgeraden, die durch den Punkt gehen, unter sich

[1]) Ark. f. Math. 1876.
[2]) Ark. f. Math. B. X.

transformiert. Lässt eine Untergruppe keinen Punkt stehen, so erzeugen alle Transformationen derselben, bei denen ein Punkt in sich übergeführt wird, eine Gruppe, die mit irgend einer der von uns bestimmten Untergruppen der Γ_7 gleichberechtigt ist; aus der Discussion dieser Untergruppen aber wissen wir, dass durch einen beliebigen invarianten Punkt stets auch eine invariante Richtung existiert. Eine Ausnahme hiervon macht die siebengliedrige Γ_7, die einen Punkt stehen lässt, und ihre erste derivierte Γ_6, die alle Volumina des Raumes invariant lässt. Es ist indessen sofort nachzuweisen, dass die Γ_6 als Untergruppe nur in der Γ_7 und der Γ_{10}, die Γ_7 nur in der Γ_{10} enthalten ist.

Bei jeder Untergruppe der Γ_{10} bleibt daher eine Schar von ∞^2 Curven invariant. Solche Untergruppen insbesondere, die keine Punktfigur in Ruhe lassen, sind sämtlich transitiv, transformieren also auch die Curven jener Schar transitiv.

Ist nun Γ_r eine r-gliedrige Untergruppe von dieser Beschaffenheit, so besitzt dieselbe eine $r-2$ gliedrige Untergruppe Γ_{r-2}, die eine beliebige Curve der bei der Γ_r invarianten Schar in sich überführt. Auf dieser Curve dürfte aber nicht gleichzeitig ein Punkt fest bleiben; denn dieser würde bei allen Transformationen der Γ_{10} entweder ebenfalls sich in Ruhe befinden oder ∞^1 oder endlich ∞^2 Lagen annehmen; die Γ_r liesse daher einen Pnnkt oder eine Curve oder eine Fläche des Raumes invariant und fände sich unter der von uns bereits bestimmten Typen vor. Auf der bei der Γ_{r-2} invarianten Curve bleibt also kein Punkt des Raumes fest. Die Γ_{r-2} ist mithin mit einer der sechs Untergruppen der Γ_{10} gleichberechtigt, die eine Curve, aber keinen Punkt stehen lassen. Stellt man sich aber die Aufgabe, alle Untergruppen der Γ_{10} zu bestimmen, in denen diese sechs Typen als Untergruppen enthalten sind, so gelangt man entweder zur Γ_{10} oder zu gewissen unter den sechs Typen zurück.



